



# Cours de Mécanique des fluides

Filière : Génie Bio-Industriel

Enseignant : E. Belahmidi

Ecole Supérieure de Technologie d'Agadir

*Année : 2019/2020*

# CH I ——— Statique des Fluides ———

Situations dans lesquelles il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules fluides :

- fluides au repos,
- fluides uniformément accélérés.



Il n'y a **pas de contraintes dues aux frottements** entre particules.

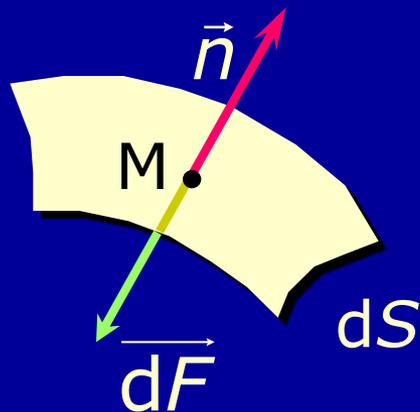


Les forces en jeu sont uniquement des **forces de surface dues à la pression.**

# 1 - Pression en un point d'un fluide



Dans un fluide au repos (uniformément accéléré), la pression désigne la **force par unité de surface** qui s'exerce perpendiculairement à un élément de surface  $dS$ .



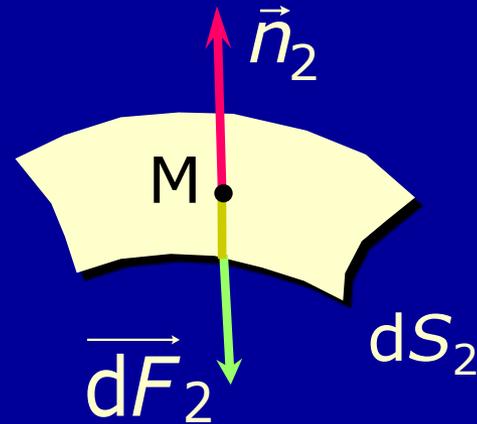
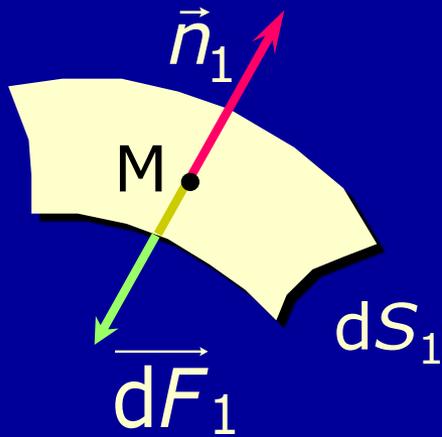
$$\vec{dF} = -p \vec{n} dS$$

$dF$  est la force exercée sur l'élément de surface  $dS$ .

$p$  est la pression régnant au point  $M$ .

La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface.

⚡ La pression est toujours indépendante de la surface et de l'orientation de cette surface :

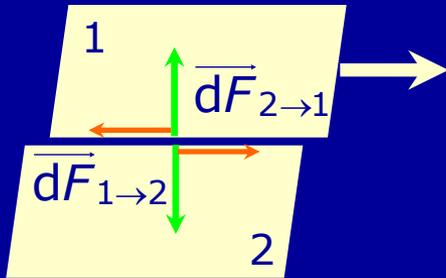


$$\vec{dF}_1 = -p_1 \vec{n}_1 dS_1$$

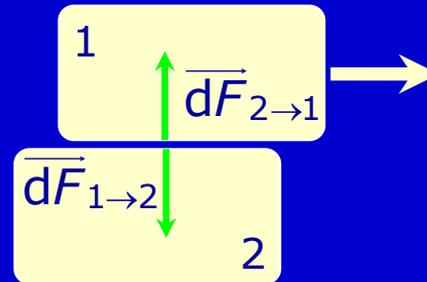
$$\vec{dF}_2 = -p_2 \vec{n}_2 dS_2$$

$$\vec{dF}_1 \neq \vec{dF}_2 \quad \text{mais} \quad p_1 = p_2 = p(M)$$

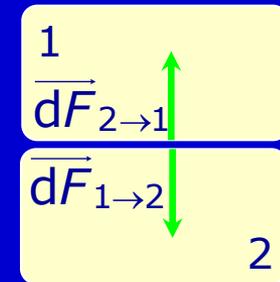
*Fluide réel  
en mouvement*



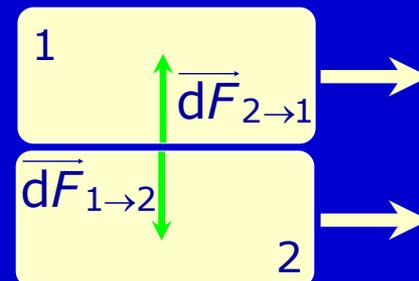
*Fluide parfait  
en mouvement*



*Fluide réel ou parfait  
au repos*



*Fluide réel ou parfait  
uniformément accéléré*



Les forces de surface  
sont normales

Il n'existe de **contraintes tangentielles** que si le fluide est **réel** et en **mouvement** non uniformément accéléré

 La pression s'exprime en **pascal** :

$$\text{Pa} = \text{N.m}^{-2} = \text{kg.m.s}^{-2}.\text{m}^{-2} = \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

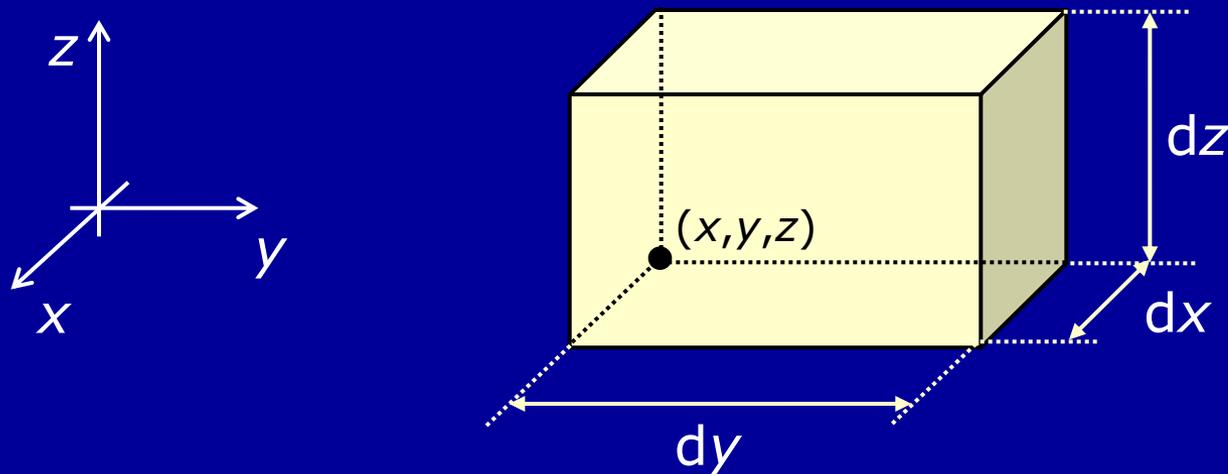
On trouve aussi :

L'**atmosphère** :  $1 \text{ atm} = 1,013.10^5 \text{ Pa}$

Le **bar** :  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

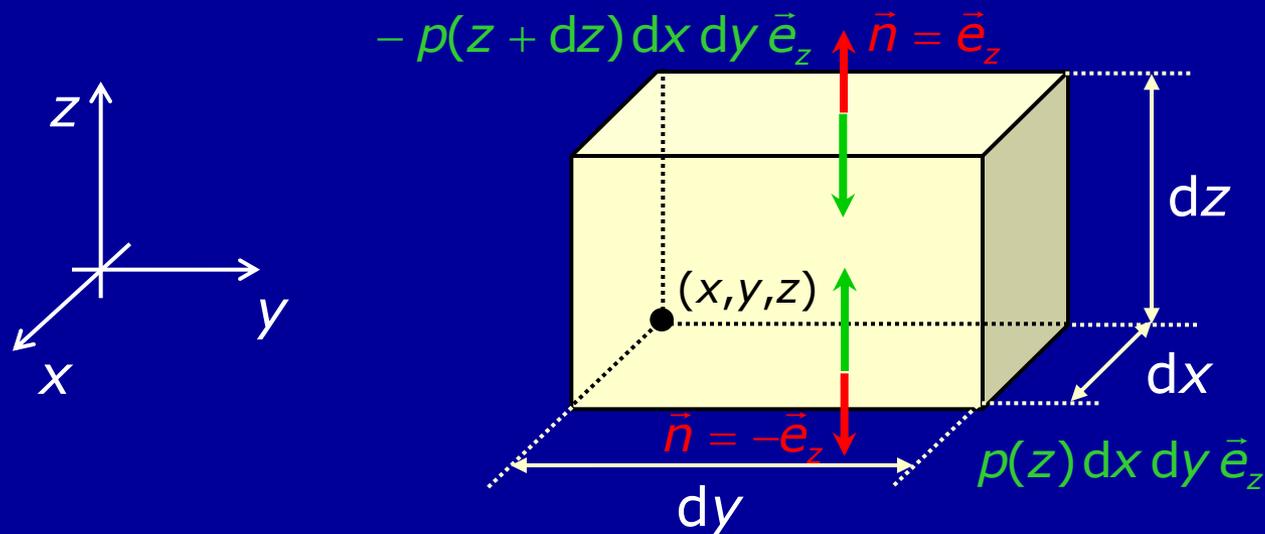
## 2 - Equation fondamentale de la Statique

On considère un élément de volume fluide de forme parallélépipédique, de volume  $dV = dx.dy.dz$ , dans un repère cartésien :



Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume impose de distinguer :

- les forces de volume : le poids
- les forces de surface : les forces de pression



Force de volume :

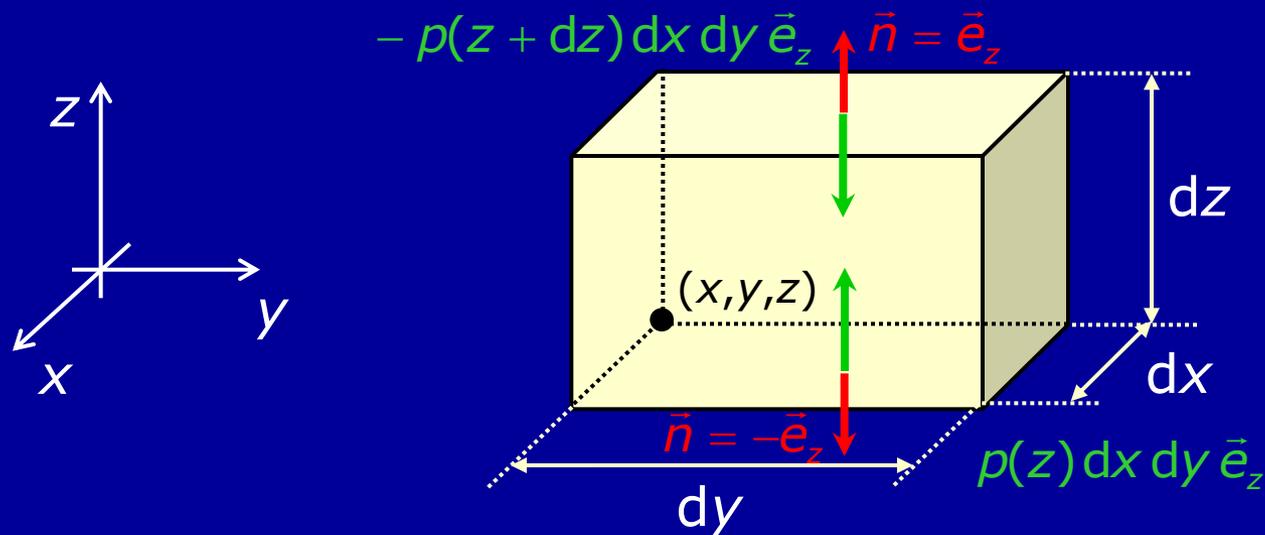
L'expression du poids du fluide est donnée par  $\vec{dP} = dm \vec{g} = \rho dV \vec{g}$

Force de surface :

On peut décomposer cette force en ses trois composantes

$$\vec{dF} = dF_x \vec{e}_x + dF_y \vec{e}_y + dF_z \vec{e}_z$$

Puisqu'ici les forces de surface sont nécessairement normales, la composante suivant  $z$  correspond aux forces de pression s'exerçant sur les surfaces perpendiculaires à l'axe  $z$ .



Donc :  $dF_z = [p(z) - p(z + dz)] dx dy$

Par un développement au premier ordre, on a :

$$p(z + dz) = p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

D'où :  $dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial z} dV$

Et par analogie, sur les deux autres axes :

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \\ dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dV \end{array} \right.$$

La force de surface se résume alors à :

$$\overrightarrow{dF} = - \underbrace{\left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\vec{\nabla} p \equiv \overrightarrow{\text{grad}} p} dV$$

Soit :  $\overrightarrow{dF} = -\vec{\nabla} p dV$

Au total, on a :  $\overrightarrow{dP} = \rho dV \vec{g}$  et  $\overrightarrow{dF} = -\vec{\nabla} p dV$

En vertu du **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique, l'ensemble des forces agissant sur la particule fluide équivaut au produit de sa masse par son accélération :

$$\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dF} = \rho dV \vec{a}$$

Par conséquent, on a :  $\rho dV \vec{g} - \vec{\nabla} p dV = \rho dV \vec{a}$

D'où :  $\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{a}$

$$\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{a}$$

Si le fluide est au repos :  $\vec{a} = \vec{0}$

Dans ce cas :  $\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$  (Équation locale)

Dans le cas d'un fluide au repos, en supposant que  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ , on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad p(x, y, z) = p(z)$$

$$\text{D'où : } \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

C'est l'équation différentielle à résoudre pour connaître la pression en tout point du fluide au repos.

### 3 - Application aux fluides incompressibles

⚡ Un fluide est dit **incompressible** si l'on peut considérer que **sa masse volumique est en tout point la même** :

$$\rho = C^{te}$$

Par ailleurs, on peut considérer que l'accélération de la pesanteur est une constante :

$$g = C^{te}$$

Par conséquent :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = C^{te}$$

Et par intégration :

$$p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz = -\int \rho g dz = -\rho g \int dz = -\rho g z + C^{te}$$

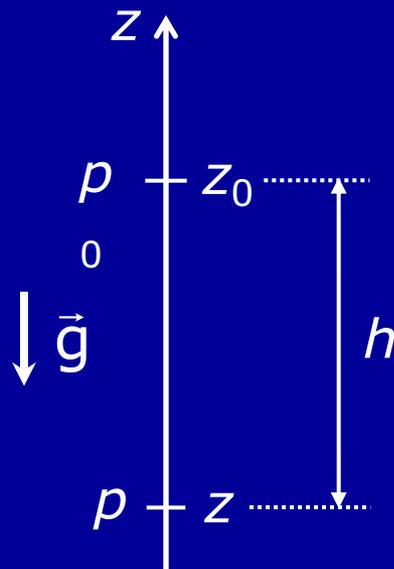
Soit :

$$p(z) + \rho g z = C^{te}$$

Puisque  $p(z) + \rho g z = C^{\text{te}}$

On a :  $p(z) + \rho g z = C^{\text{te}} = p_0 + \rho g z_0$

où  $p_0$  est la pression à l'altitude  $z_0$



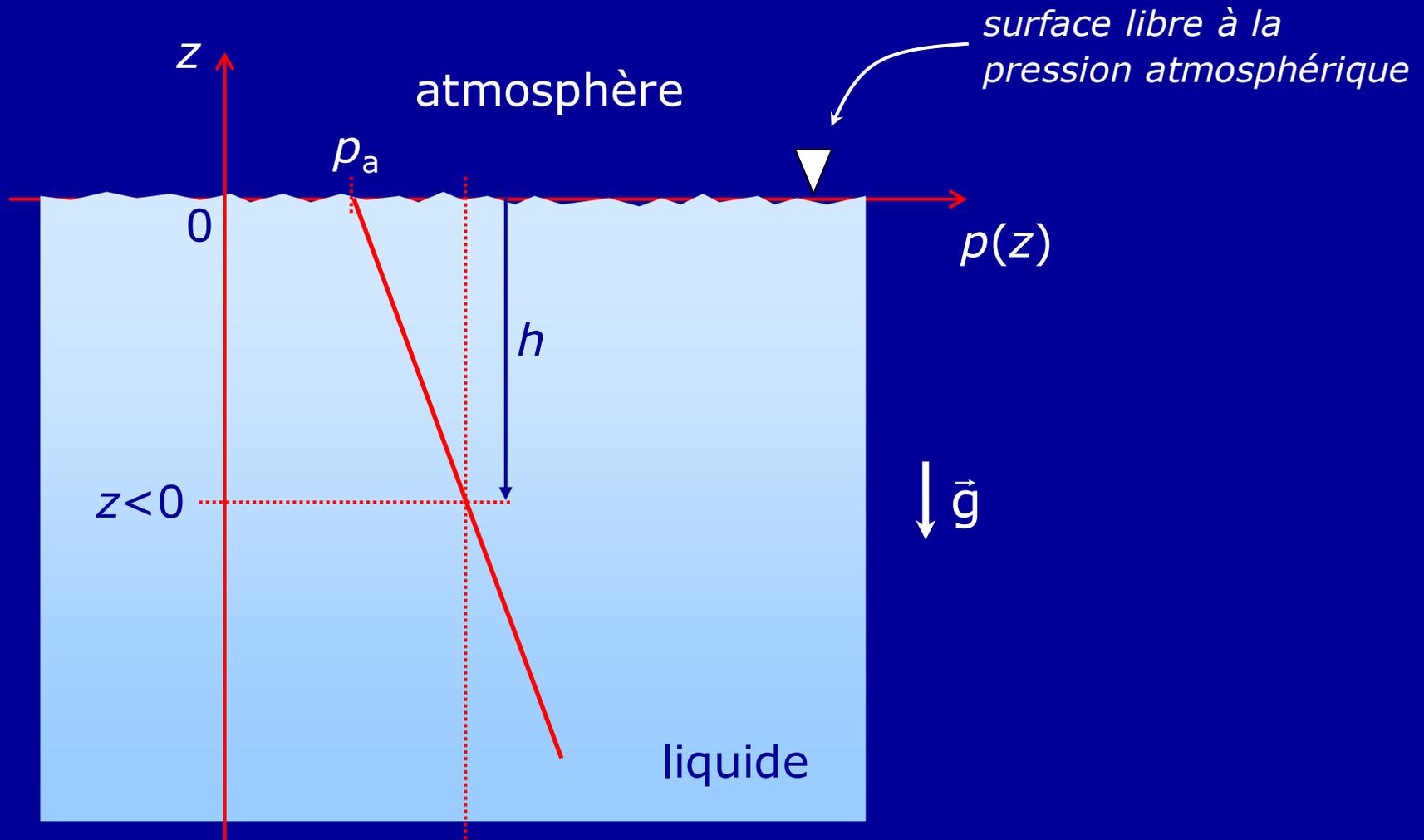
Donc :  $p(z) = p_0 + \rho g \underbrace{(z_0 - z)}_h$

*hauteur de fluide sous  
le niveau de référence*

$$p(z) = p_0 + \rho g h$$

La plupart du temps, on prendra  $z_0 = 0$  le niveau de référence correspondant à la surface libre du fluide où  $p_0 = p_a$

Pour les applications numériques, on prendra la pression atmosphérique standard :  $p_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$



$$p = p_a - \rho g z$$

$$p = p_a + \rho g h$$

## 4 - Application aux fluides compressibles

De façon générale, il s'agit des **gaz** puisque leur densité dépend de la pression.

Pour simplifier l'étude, on prendra le cas d'un **gaz parfait** :

$$pV = nRT$$

Soit :  $p = \frac{nRT}{V}$

Or :  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}$

$M$  : *masse molaire du gaz*

D'où :  $p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT} p$

la masse volumique est fonction de la pression  
 $\Rightarrow$  *compressibilité*

En partant de l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(p)g \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{M}{RT} pg \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT} g dz$$

Il faut donc intégrer :  $\int \frac{dp}{p} = - \int \frac{M}{RT} g dz + C^{te}$

Soit :  $\ln p = - \frac{M}{RT} g z + C^{te}$

*Constante si la température est homogène*

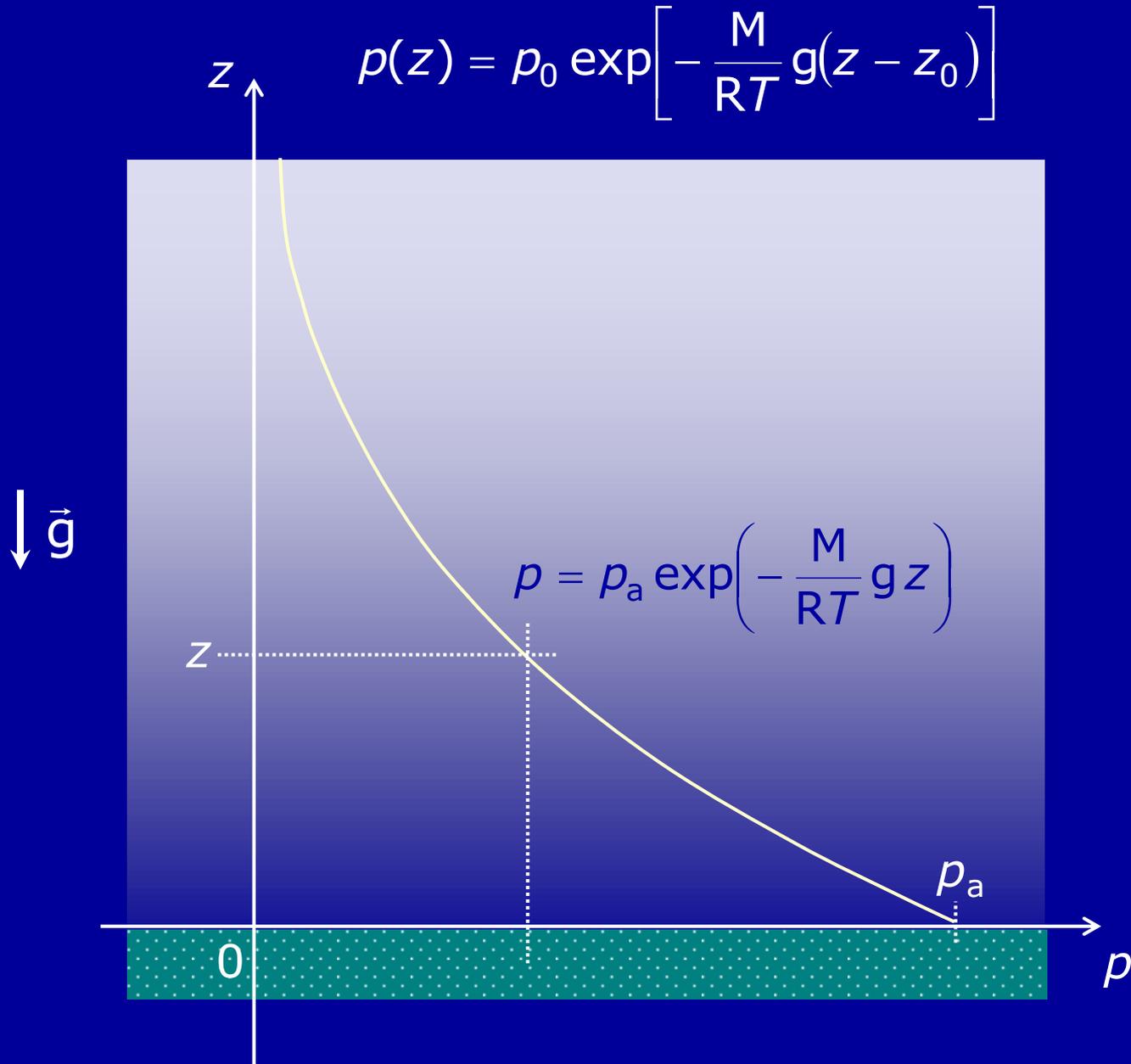
Donc :  $p(z) = C^{te} \exp\left(- \frac{M}{RT} g z\right)$

où la constante se définit par rapport à la pression pour un niveau de référence

Ainsi, si  $p=p_0$  en  $z=z_0$ , alors :  $p_0 = C^{te} \exp\left(- \frac{M}{RT} g z_0\right)$

$$\Rightarrow C^{te} = p_0 \exp\left(\frac{M}{RT} g z_0\right)$$

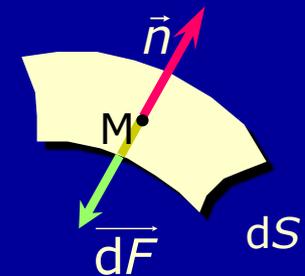
Donc :  $p(z) = p_0 \exp\left[- \frac{M}{RT} g(z - z_0)\right]$



## 5 - Forces hydrostatiques

On peut désormais s'intéresser à la détermination des **forces s'exerçant sur les surfaces solides immergées**.

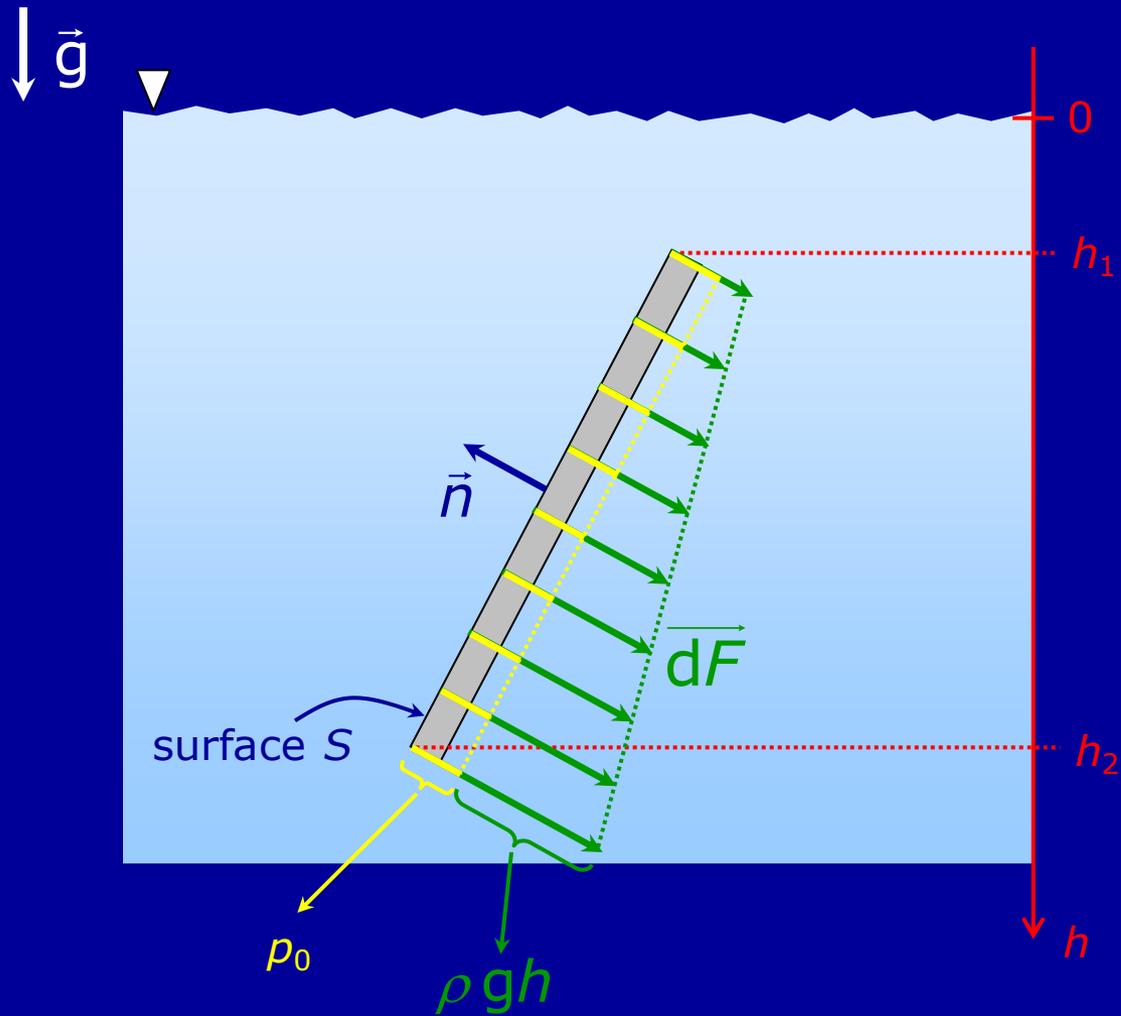
On sait que  $\overrightarrow{dF} = -p\vec{n}dS$  est la force de pression élémentaire s'exerçant sur la surface élémentaire  $dS$ .



Pour connaître la force totale s'exerçant sur une surface  $S$ , il suffit d'intégrer  $\overrightarrow{dF}$  sur cette surface  $S$  :

$$\vec{F} = \int_S -p\vec{n}dS$$

## Cas particulier d'une plaque plane :



$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS$$

$$\text{où } p = p_0 + \rho g h$$

$$\text{donc } \vec{F} = \int_S -p\vec{n}dS$$

$$\Downarrow$$

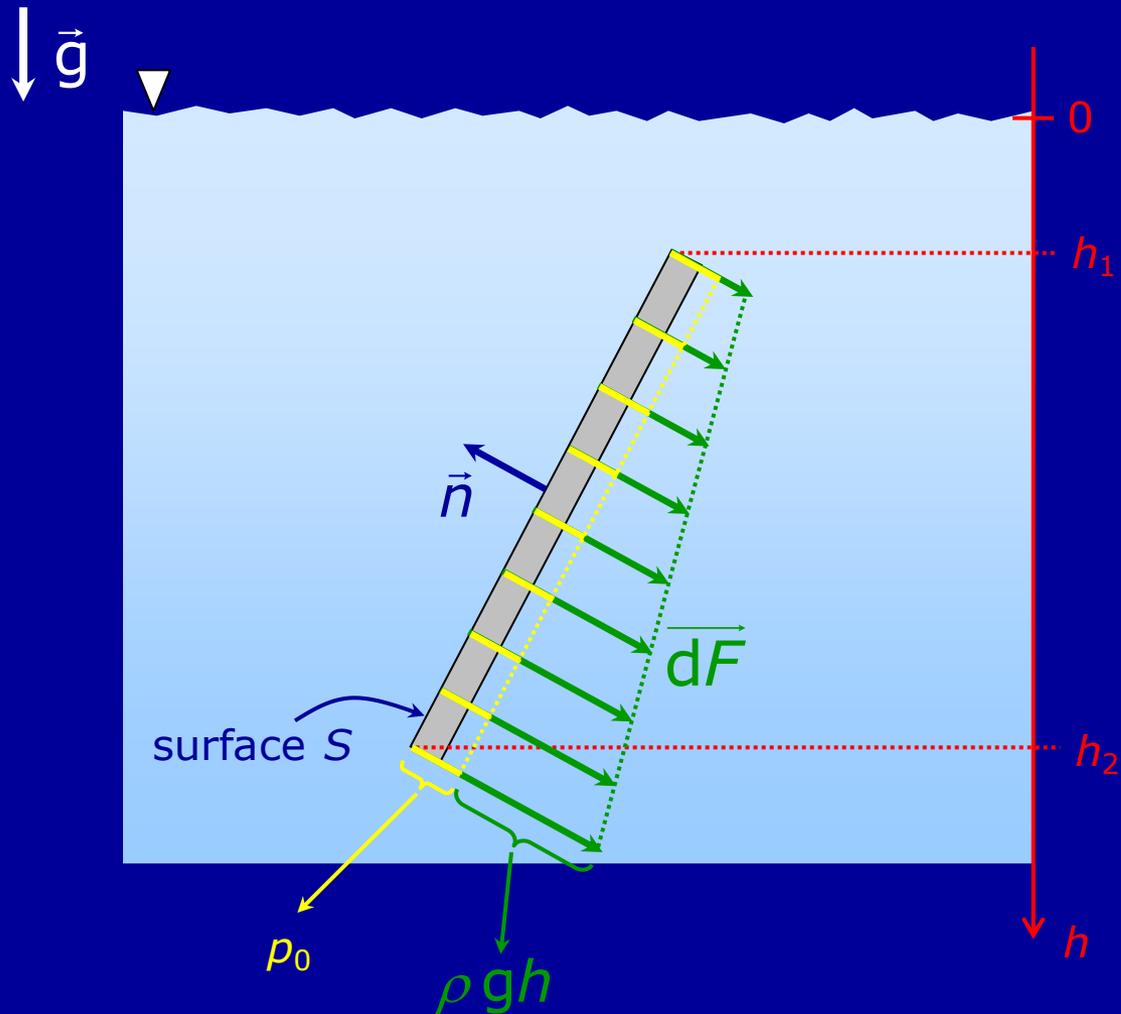
$$\vec{F} = -\vec{n} \int_S (p_0 + \rho g h) dS$$

$$\vec{F} = -\vec{n} \left( p_0 S + \rho g \int_S h dS \right)$$

$$\text{avec } \int_S h dS = h_G S$$

profondeur du barycentre de la surface

## Cas particulier d'une plaque plane :



Par conséquent :

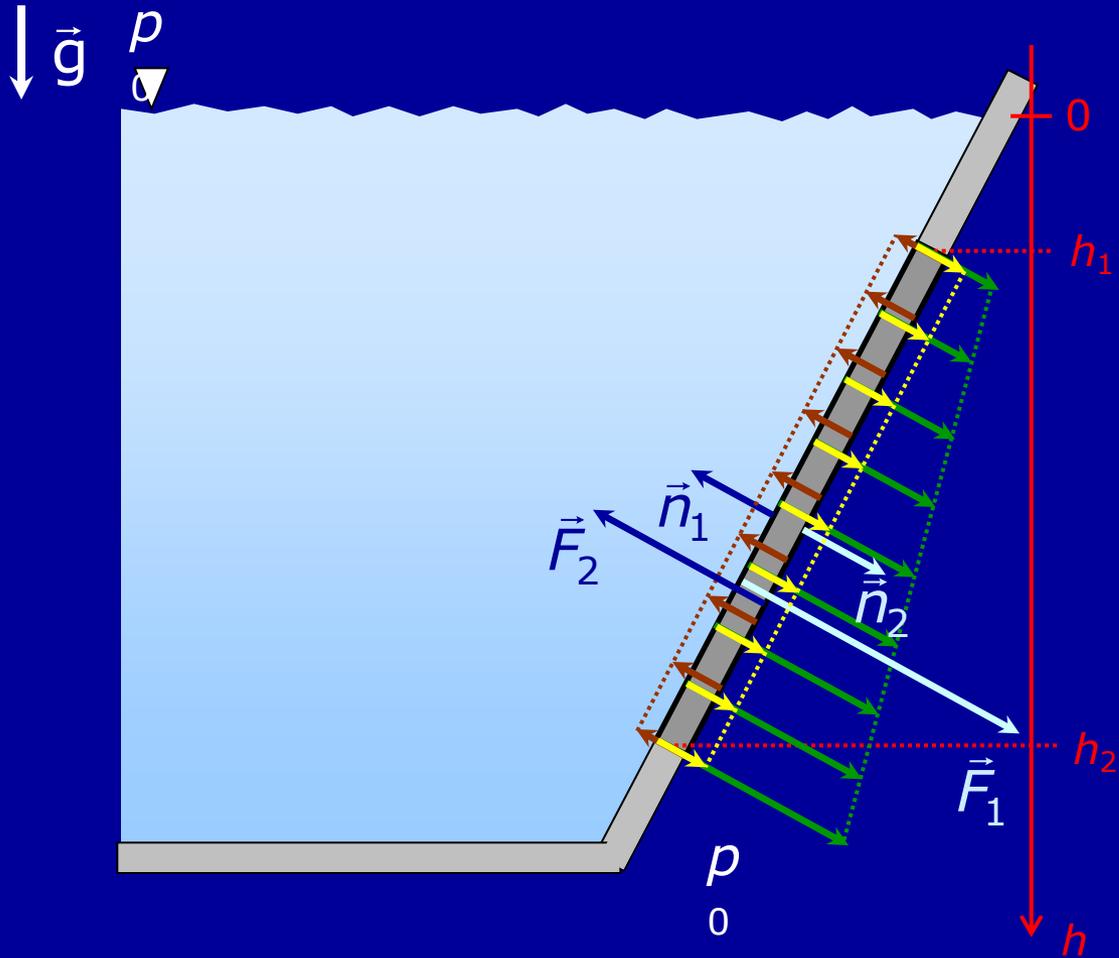
$$\vec{F} = -\vec{n}S(p_0 + \rho gh_G)$$

$$h_G = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

## ⚡ Remarque :

Si on néglige l'épaisseur de la plaque, une force de direction opposée mais de même intensité s'applique sur la face opposée  $\Rightarrow$  la résultante des forces de pression s'exerçant sur la plaque est donc nulle.

Cas particulier d'une paroi :



$$\vec{F}_1 = -\vec{n}_1 S(\rho_0 + \rho gh_G)$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{n}_2 S p_0$$

*La pression atmosphérique s'applique de part et d'autre de la paroi*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

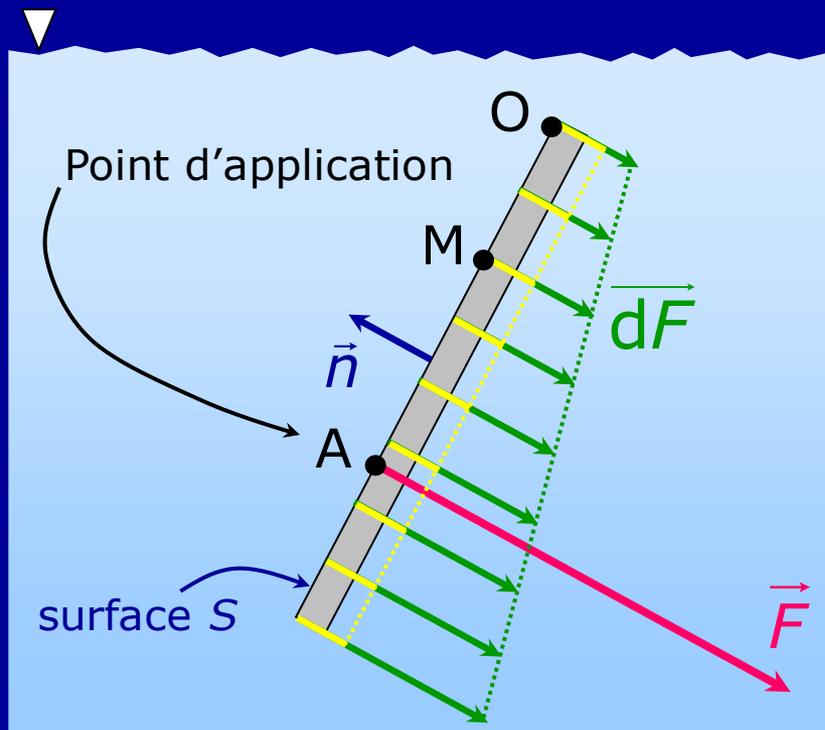
$$\vec{F} = -\rho gh_G S \vec{n}_1$$

ou bien

$$\vec{F} = \rho gh_G S \vec{n}_2$$

## Détermination du point d'application d'une force hydrostatique :

Si  $\vec{F}$  est la force hydrostatique s'exerçant sur une surface  $S$ , alors on peut avoir besoin de connaître le point d'application  $A$  de cette force.



*Il faut alors calculer le moment de la force par rapport à un point  $O$  quelconque, puis identifier ce moment à la résultante des moments élémentaires par rapport à ce même point  $O$  :*

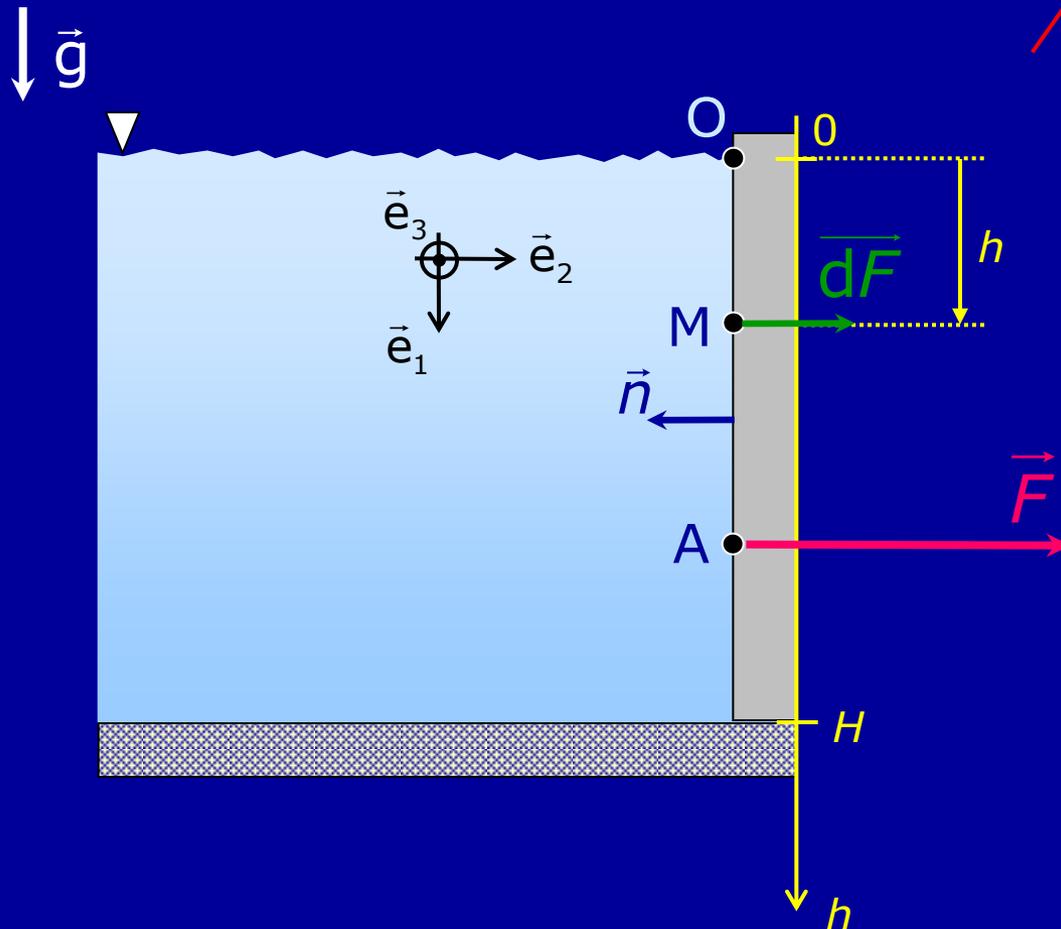
$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

**Remarque :**

*Il est en général commode de choisir un point  $O$  appartenant à la surface*

**Exemple** : cas d'une paroi

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F} \Rightarrow \cancel{OA \cdot F \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_{\vec{e}_3}} = \int_S \cancel{OM \cdot dF \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_{\vec{e}_3}}$$



$$OA \cdot F = \int_S OM \cdot dF$$

$$F = F_{\text{hydro}} - F_{\text{atmo}}$$

$$F = (p_0 + \rho g h_G) S - p_0 S = \rho g h_G S = \rho g \frac{H}{2} S$$

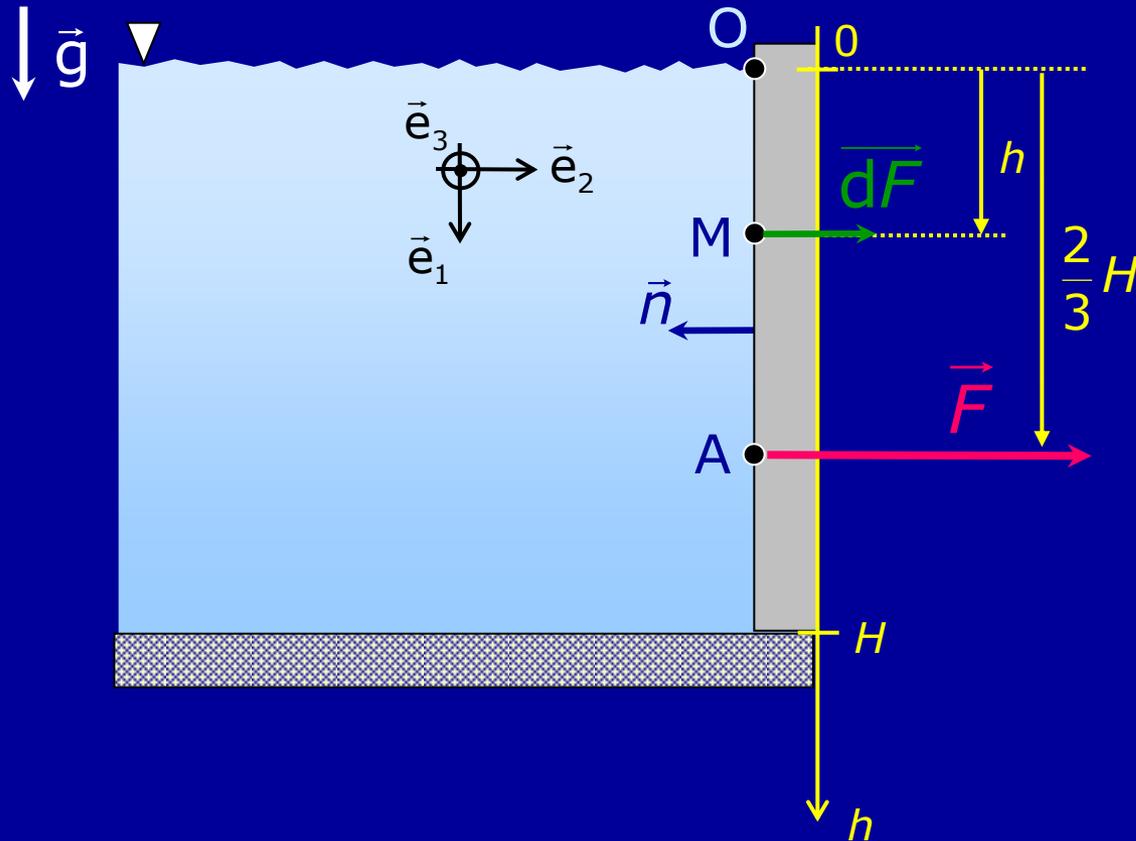
$$OM = h$$

$$dF = \rho g h dh L$$

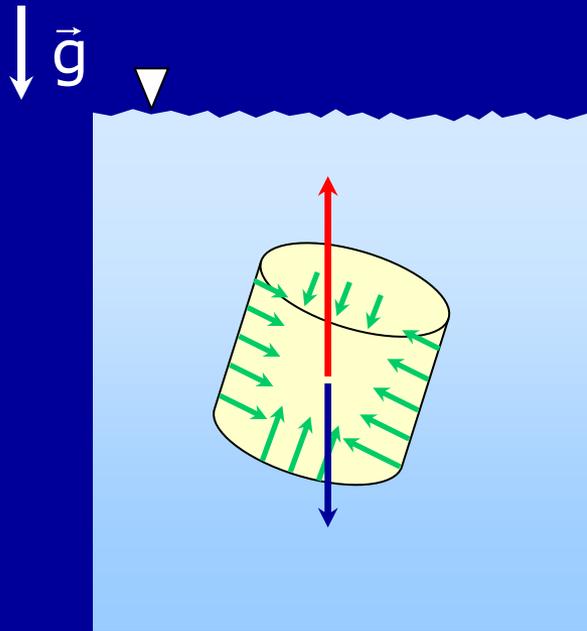
$$OA = \frac{\int_0^H h \cdot \rho g h dh L}{\rho g \frac{H}{2} S}$$

$$OA = \frac{\int_0^H h \cdot \rho g h d h L}{\rho g \frac{H}{2} S} = \frac{\cancel{\rho g L}}{\cancel{\rho g \frac{H}{2} S}} \int_0^H h^2 d h = \frac{2}{H^2} \frac{H^3}{3} \Rightarrow OA = \frac{2}{3} H$$

$\swarrow$   
 $L.H$



## Effort exercé sur un objet totalement immergé : (Poussée d'Archimède)



On sait que la force exercée par le fluide sur le solide immergé s'exprime comme :

$$\vec{F} = \int_S -p \vec{n} dS$$

La formule du gradient permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume :

$$\iint_S f \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} f dV$$

Dans le cas présent, si l'on identifie le scalaire  $f$  à la pression, on obtient :

$$\vec{F} = -\iiint_V \vec{\nabla} p dV$$

Or, l'équation fondamentale de la statique des fluides permet d'écrire :

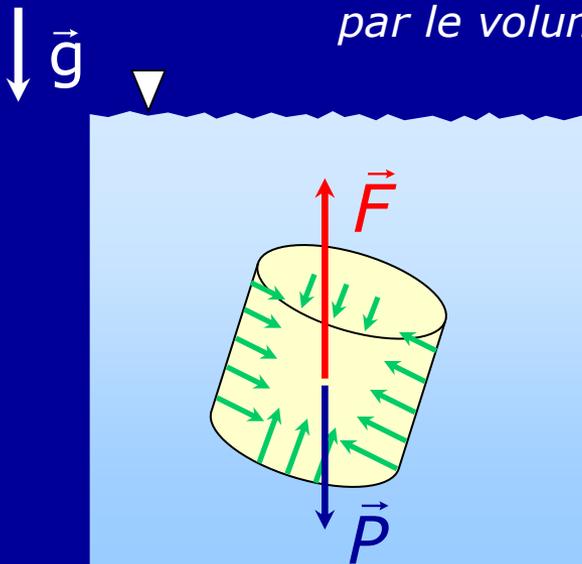
$$\vec{\nabla}p = \rho \vec{g} \quad \text{d'où} \quad \vec{F} = -\iiint_V \vec{\nabla}p dV = -\iiint_V \rho \vec{g} dV$$

En supposant  $g$  constante sur tout le volume :

$$\vec{F} = -\vec{g} \underbrace{\iiint_V \rho dV}_{\text{masse de fluide déplacé par le volume solide}} = -\rho V \vec{g} \quad \Rightarrow \text{force opposée au poids du fluide déplacé}$$



**Poussée d'Archimède**



⚡ Remarque :

*On admettra que le **point d'application** de la poussée d'Archimède est le **centre de masse** de la partie immergée du solide*



# CH II ——— Dynamique des Fluides ———

Il s'agira ici de tenir compte des différentes forces agissant sur les particules fluides en mouvement. Une description quantitative de l'écoulement pourra ainsi être déduite d'équations fondamentales locales.

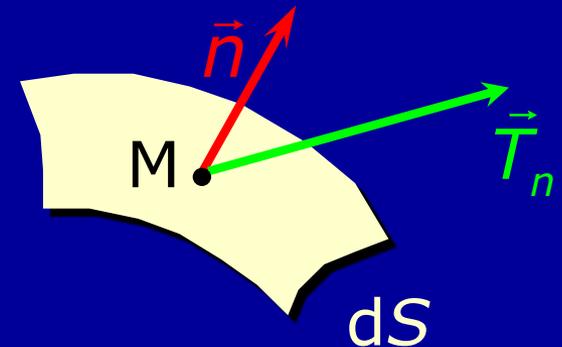
## 1 - Forces de surface - Tenseur des contraintes

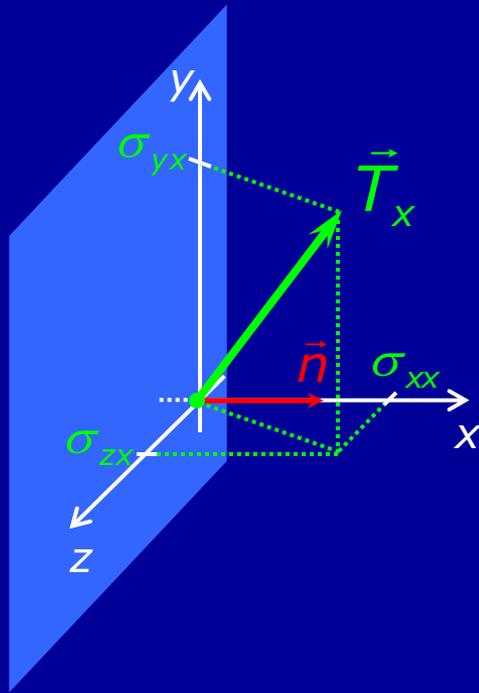
Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe des **contraintes tangentielles** dues à la viscosité (frottements).

En un point M d'une surface  $dS$ , la force de surface s'exprime comme :

$$d\vec{F} = \vec{T}_n dS$$

où  $\vec{T}_n$  est la **contrainte** qui s'exerce sur la surface de normale  $\vec{n}$ .





Considérons une surface  $\perp$  à l'axe  $x$ .  
La normale à cette surface est :  $\vec{n} = \vec{e}_x$

La contrainte exercée sur cette surface est alors notée  $\vec{T}_x$  et peut se décomposer comme :

$$\vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{yx} \vec{e}_y + \sigma_{zx} \vec{e}_z$$

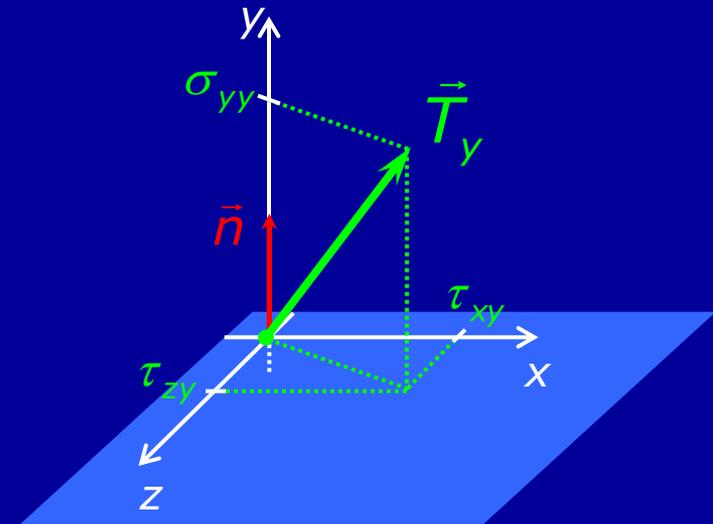
On remarque que les composantes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  sont des composantes tangentielles : on les notera plutôt  $\tau_{yx}$  et  $\tau_{zx}$  pour les distinguer de la composante normale  $\sigma_{xx}$ .

On peut de même considérer la surface  $\perp$  à l'axe  $y$ . On a ainsi la contrainte :

$$\vec{T}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z$$

Et pour la surface  $\perp$  à l'axe  $z$  la contrainte s'exprime :

$$\vec{T}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z$$



Considérons maintenant une surface dont l'orientation est quelconque. Dans le repère cartésien, sa normale peut se décomposer en :

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z$$

Dans ce cas, la contrainte s'exerçant sur cette surface s'exprime comme :

$$\vec{T}_n = n_x \vec{T}_x + n_y \vec{T}_y + n_z \vec{T}_z$$

En développant, on obtient :

$$\vec{T}_n = \begin{cases} n_x(\sigma_{xx} \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z) \\ + n_y(\tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z) \\ + n_z(\tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z) \end{cases} = \begin{cases} (n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) \vec{e}_x \\ (n_x \tau_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{yz}) \vec{e}_y \\ (n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \sigma_{zz}) \vec{e}_z \end{cases}$$

Ce qui revient à effectuer le produit d'une matrice par la normale :

$$\vec{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{T}_n = \overline{\overline{T}} \vec{n}$$

**Tenseur  
des  
Contraintes**

Ce tenseur des contraintes peut alors se décomposer en la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur de trace nulle :

$$\bar{\bar{T}} = \alpha \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}}'$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Tenseur des} \\ \text{contraintes} \\ \text{de viscosité} \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \alpha + \sigma'_{xx} \\ \sigma_{yy} = \alpha + \sigma'_{yy} \\ \sigma_{zz} = \alpha + \sigma'_{zz} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0 = -3\alpha + \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{T}})$$

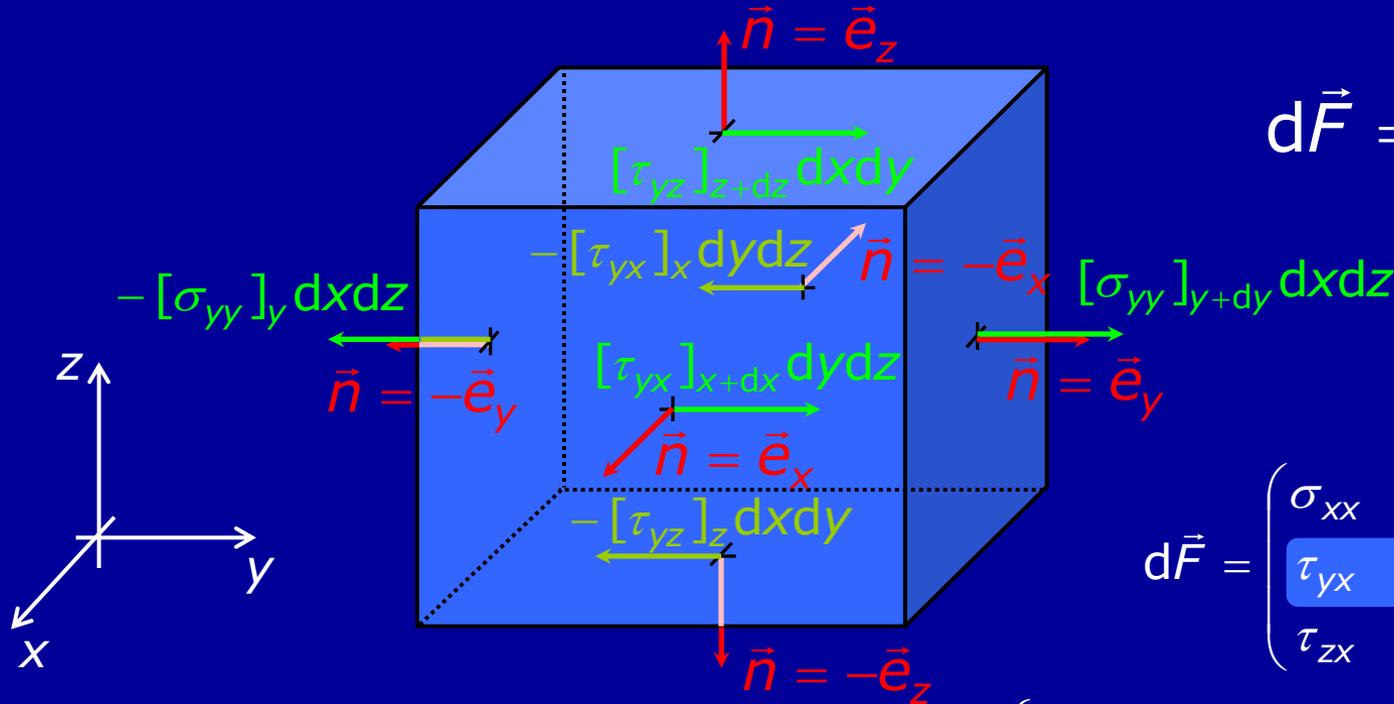
$$\vec{T}_n = \bar{\bar{T}} \vec{n} = \alpha \bar{\bar{I}} \vec{n} + \bar{\bar{T}}' \vec{n} = \alpha \vec{n} + \bar{\bar{T}}' \vec{n}$$

$$d\vec{F} = \vec{T}_n dS = \underbrace{\alpha \vec{n} dS}_{\text{force normale à la surface}} + \bar{\bar{T}}' \vec{n} dS \quad \Rightarrow \quad d\vec{F} = -p \vec{n} dS + \bar{\bar{T}}' \vec{n} dS$$

force normale à la surface  $\Rightarrow$  force de pression hydrostatique  
 $\alpha = -p$

où  $p = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{T}})$   
 et  $\text{Tr}(\bar{\bar{T}}') = 0$





$$d\vec{F} = \bar{T} \vec{n} dS$$

$$d\vec{F} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \vec{n} dS$$

$$dF_{S_y} = ([\tau_{yx}]_{x+dx} - [\tau_{yx}]_x) dydz + ([\sigma_{yy}]_{y+dy} - [\sigma_{yy}]_y) dxdz + ([\tau_{yz}]_{z+dz} - [\tau_{yz}]_z) dxdy$$

$$\text{où } \begin{cases} [\tau_{yx}]_{x+dx} = [\tau_{yx}]_x + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \\ [\sigma_{yy}]_{y+dy} = [\sigma_{yy}]_y + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \\ [\tau_{yz}]_{z+dz} = [\tau_{yz}]_z + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \end{cases}$$

$$\Rightarrow dF_{S_y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz dx dy$$

$$dF_{S_y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \underbrace{dx dy dz}_{dV} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \underbrace{dy dx dz}_{dV} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \underbrace{dz dx dy}_{dV}$$

$$dF_{S_y} = \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dV$$

Et par analogie, suivant les autres axes :

$$dF_{S_x} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dV \quad dF_{S_z} = \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dV$$

Ce qui peut s'écrire comme :

$$d\vec{F}_S = \vec{\nabla} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} dV = \vec{\nabla} \overline{\overline{T}} dV$$

Par conséquent :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{T} dV + \rho \vec{g} dV = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{T} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On peut alors faire apparaître les deux parties du tenseurs des contraintes :

$$\bar{T} = -p\bar{I} + \bar{T}'$$

$$\vec{\nabla} \bar{T} = -\vec{\nabla} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \vec{\nabla} \bar{T}' = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \bar{T}'$$

Soit finalement :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \bar{T}' + \rho \vec{g}$$

**équation fondamentale  
de la dynamique**  
(équation locale)

### 3 - Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes

Par définition, les fluides « newtoniens » sont ceux pour lesquels les composantes du tenseur des contraintes de viscosité  $\overline{\overline{T}}$  dépendent *linéairement* des composantes du tenseur des taux de déformation pure  $\overline{\overline{e}}$ .

 Remarque :

*Une rotation pure n'engendre aucune déformation : par conséquent il n'y a pas de contrainte. C'est pourquoi  $\overline{\overline{T}}$  et  $\overline{\overline{\omega}}$  ne sont pas liés.*

 Remarque :

*Tous les fluides que l'on étudiera pourront être considérés newtoniens.*

Considérons les éléments tensoriels de  $\overline{\overline{e}}$  :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{on rappelle que ce tenseur est symétrique, car } e_{ij} = e_{ji}$$

On admettra alors que pour un fluide isotrope, les éléments tensoriels de  $\overline{\overline{T}}$  et  $\overline{\overline{e}}$  sont liés par la relation suivante :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} + \mu' (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \delta_{ij}$$

$\uparrow$   
viscosité
 $\uparrow$   
viscosité de dilatation
 $\uparrow$   
symbole de Kronecker

On remarque que :  $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

Donc, si le fluide est incompressible, on a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  et dans ce cas :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} \Rightarrow \overline{\overline{T}} = 2\mu \overline{\overline{e}}$$

Reprenons l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \bar{T} + \rho \vec{g}$$

Pour un fluide incompressible newtonien, cette équation devient donc :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + 2\mu \vec{\nabla} \bar{e} + \rho \vec{g}$$

Explicitons le terme  $\vec{\nabla} \bar{e}$  :

$$\vec{\nabla} \bar{e} = \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i \quad \text{où } e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{e} = \sum_i \sum_j \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \vec{e}_i$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \overline{\mathbf{e}} &= \sum_i \sum_j \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{x}_i} \right) \vec{\mathbf{e}}_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \underbrace{\left( \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_j^2} \right)}_{\Delta \mathbf{v}_i} \vec{\mathbf{e}}_i + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \underbrace{\left( \sum_j \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{x}_j} \right)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}} \vec{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \Delta \vec{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}})
\end{aligned}$$


  
*car fluide incompressible*

$\Delta \vec{\mathbf{v}}$ 
 $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}})$

Il reste alors :  $\vec{\nabla} \overline{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \Delta \vec{\mathbf{v}}$

Ce qui conduit à :

$$\rho \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -\vec{\nabla} p + 2\mu \vec{\nabla} \overline{\mathbf{e}} + \rho \vec{\mathbf{g}} \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{\mathbf{v}} + \rho \vec{\mathbf{g}}$$

*équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien incompressible*

**équation de Navier-Stokes**  
(équation locale)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

*dérivée instantanée*  
*dérivée convective*

$\Downarrow$  dérivée particulière :  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$

$$\Rightarrow \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

En posant  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ , la projection de l'équation de *Navier-Stokes* sur les 3 axes du repère cartésien donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{array} \right.$$

## 4 - Equation fondamentale en volume et théorème d'Euler

### a) Théorème de transport de Reynolds

Considérons une grandeur scalaire fonction des coordonnées de l'espace et du temps :  $f(\vec{r}, t)$

Sur le volume  $V_S$  d'un système de particules fluides, l'intégrale de  $f(\vec{r}, t)$  s'écrit :

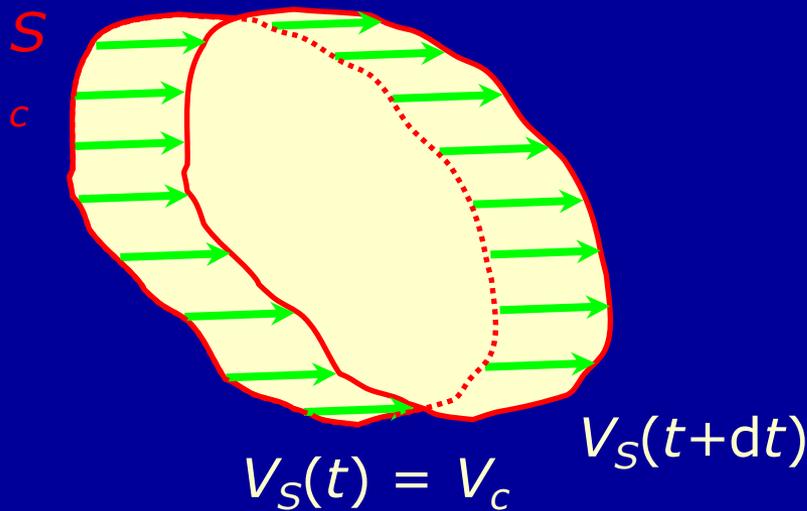
$$F = \iiint_{V_S} f(\vec{r}, t) dV$$

Si l'on souhaite évaluer les variations de  $F$  dans le temps, il nous faut calculer :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_S(t)} f(\vec{r}, t) dV$$

*Le problème est qu'ici  $V_S$  est une fonction du temps : en effet le système de particules fluides est en mouvement.*

La parade consiste à utiliser un volume fixe  $V_c$  (volume de contrôle), délimité par une surface  $S_c$  (surface de contrôle) à travers laquelle on pourra comptabiliser le flux de  $f$  :



$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_S(t)} f(\vec{r}, t) dV$$

$$\frac{dF}{dt} = \underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial f}{\partial t} dV}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\iint_{S_c} f \vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\text{dérivée convective}}$$

*Variations instantanées de  $f$   
dans le volume de contrôle*

*Flux de  $f$  à travers la  
surface de contrôle*

Prenons un exemple concret :  $f(\vec{r}, t) \equiv \rho(\vec{r}, t)$  *masse volumique*

Dans ce cas :  $F = \iiint_{V_S} f(\vec{r}, t) dV \equiv \iiint_{V_S} \rho(\vec{r}, t) dV = M$  *masse de  $V_S$*

La variation de masse s'exprime donc comme :

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

*variation de masse due  
aux variations  
instantanées de  $\rho$*



*variation de masse due au  
flux massique à travers la  
surface de contrôle*



Utilisons la formule d'*Ostrogradski* pour transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume :

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_c} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

Il s'en suit :

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{V_c} \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) dV$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \iiint_{V_c} \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) \right)}_{\text{équation de continuité}} dV$$

Ainsi, si l'écoulement est conservatif, on retrouve bien :

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad \text{autrement dit, il n'y a pas de variation de masse}$$

## b) Théorème de transport appliqué à la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un système fluide de volume  $V_S$  s'écrit :

$$\iiint_{V_S} \rho \vec{v} \, dV$$

Or, le principe fondamental de la dynamique nous dit que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement doit être égale à la somme des forces agissant sur le système :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_S} \rho \vec{v} \, dV = \vec{R} + \vec{P}$$

forces de surface

$$\iint_{S_S} \vec{T} \vec{n} \, dS$$

calcul d'accès  
difficile

⇒

il est généralement plus simple de calculer la variation de quantité de mouvement

forces de volume (poids)

$$\iiint_{V_S} \rho \vec{g} \, dV$$

calcul trivial

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi : } \vec{R} + \vec{P} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V_S} \rho \vec{v} dV = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \iiint_{V_S} \rho v_i dV \right] \vec{e}_i \\
 &= \sum_i \left[ \iiint_{V_c} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \iint_{S_c} (\rho v_i) \vec{v} \vec{n} dS \right] \vec{e}_i \\
 &= \iiint_{V_c} \left[ \sum_i \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \vec{e}_i \right] dV + \iint_{S_c} \left[ \sum_i (\rho v_i) \vec{e}_i \right] \vec{v} \vec{n} dS
 \end{aligned}$$

$$= \iiint_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_{S_c} (\rho \vec{v}) \vec{v} \vec{n} dS$$

dérivée instantanée  
de la quantité de  
mouvement

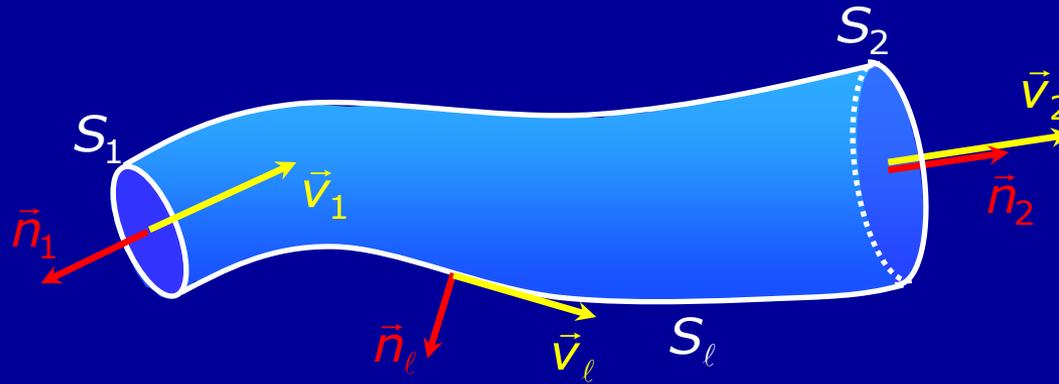
débit de quantité de  
mouvement à travers  
la surface de contrôle

Pour un écoulement stationnaire,  
la dérivée instantanée est nulle, et donc :

$$\vec{R} + \vec{P} = \iint_{S_c} (\rho \vec{v}) \vec{v} \vec{n} dS$$

c) Théorème d'Euler

Appliquons le résultat précédent au cas d'un tube de courant :



On supposera la vitesse constante en tout point d'une même section ; l'écoulement sera supposé stationnaire.

$$\vec{R} + \vec{P} = \iint_{S_1+S_2+S_l} (\rho \vec{v}) \vec{v} \vec{n} dS$$

$$\vec{R} + \vec{P} = \underbrace{\iint_{S_1} (\rho \vec{v}_1) \vec{v}_1 \vec{n}_1 dS}_{-\rho v_1 \vec{v}_1 S_1} + \underbrace{\iint_{S_2} (\rho \vec{v}_2) \vec{v}_2 \vec{n}_2 dS}_{\rho v_2 \vec{v}_2 S_2} + \iint_{S_l} (\rho \vec{v}_l) \vec{v}_l \vec{n}_l dS$$

$\downarrow -v_1$ 
 $\downarrow v_2$ 
 $\downarrow 0$

Il reste :  $\vec{R} + \vec{P} = -\rho v_1 \vec{v}_1 S_1 + \rho v_2 \vec{v}_2 S_2$

Or, on sait que dans un tube de courant le débit massique est conservé :  $q_m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$

D'où le résultat simple suivant :

$$\vec{R} + \vec{P} = q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

### ***Théorème d'Euler***

 Remarque : *ce théorème permet d'obtenir simplement la résultante des forces de surface (notamment les forces de frottement) sans avoir à recourir au tenseur des contraintes.*



# CH III — Application aux Fluides Parfaits Incompressibles —

Nous allons appliquer les équations fondamentales de la dynamique au cas de fluides parfaits (non visqueux) et incompressibles.

## 1 - Equation de *Bernoulli*

Partons de l'équation fondamentale de la dynamique et considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

*écoulement stationnaire*                      *fluide parfait donc non visqueux*

Si  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ , alors on peut écrire :  $\rho \vec{g} = -\vec{\nabla}(\rho g z)$

Par ailleurs, on vérifie toujours l'égalité vectorielle suivante :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$



Par conséquent :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla}(\vec{v}\vec{v}) - \rho \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(\rho g z)$$


$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2\right) + \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}(\rho g z) = \rho \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z\right) = \rho \vec{v} \wedge \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})}_{2\vec{\Omega}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z\right) = 2\rho \vec{v} \wedge \vec{\Omega}$$

Si l'écoulement est irrotationnel :  $\vec{\Omega} = \vec{0}$  et par conséquent :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z\right) = \vec{0}$$

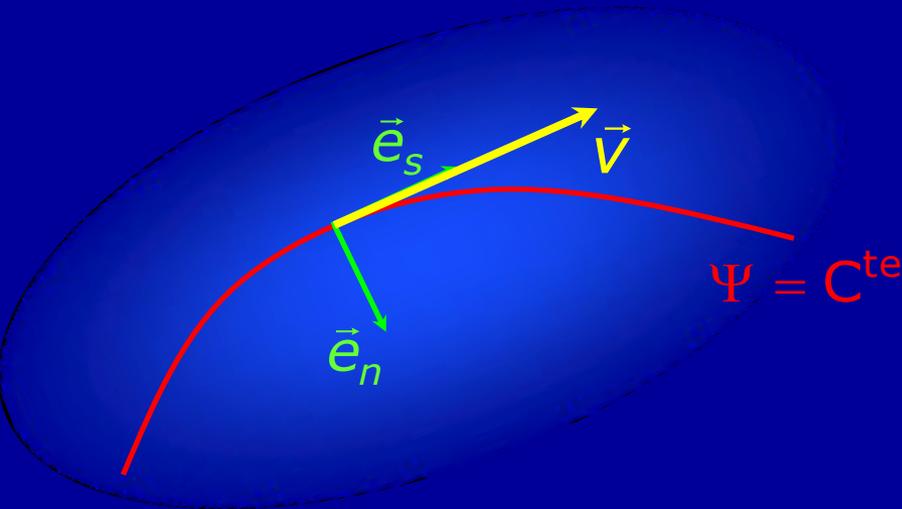
Donc :  $\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = C^{\text{te}}$

**en tout point** de l'écoulement  
si celui-ci est **irrotationnel**.

Si l'écoulement n'est pas irrotationnel :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(\rho g z) = -\vec{\nabla}(\underbrace{p + \rho g z}_{p^*}) = -\vec{\nabla}p^*$$

$p^*$  : pression motrice



Le long d'une ligne de courant, dans le repère de *Frenet* le vecteur vitesse s'exprime :

$$\vec{v} = v\vec{e}_s$$

Dans ce même repère, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = (v\vec{e}_s) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial s} \vec{e}_s \right) = v \frac{\partial}{\partial s}$$

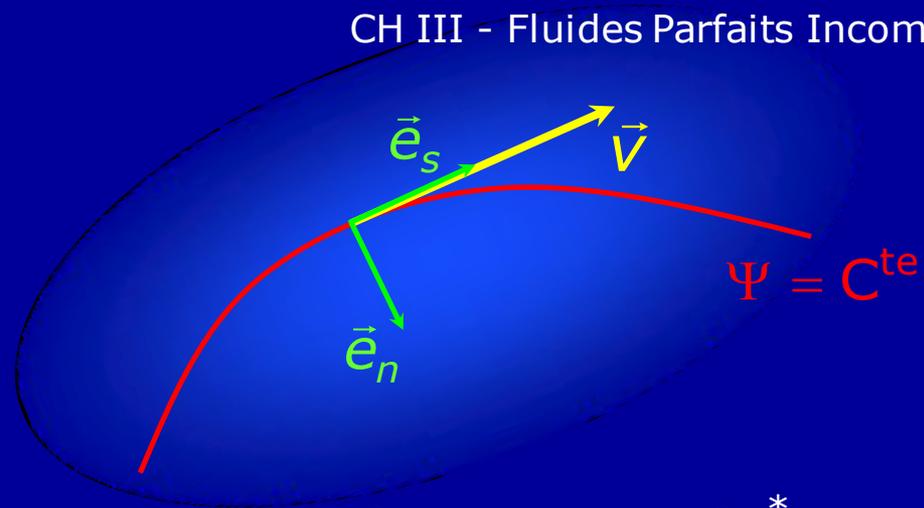
$$\text{D'où : } \rho v \frac{\partial}{\partial s} (v\vec{e}_s) = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \vec{e}_s - \frac{\partial p^*}{\partial n} \vec{e}_n$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + v \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + v \frac{\vec{e}_n}{R}$$

$$\text{Soit : } \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + \rho \frac{v^2}{R} \vec{e}_n = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \vec{e}_s - \frac{\partial p^*}{\partial n} \vec{e}_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \\ \rho \frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \quad \text{(i)} \\ \rho \frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \quad \text{(ii)} \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \rho v \frac{\partial v}{\partial s} &= \rho \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p^* \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z \right) = 0 \end{aligned}$$

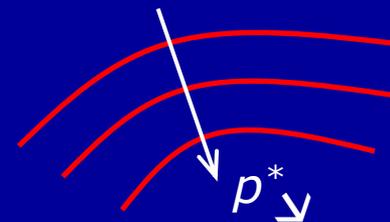
$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{\text{te}}} \quad \text{le long d'une même ligne de courant.}$$

**équation de Bernoulli**

$$\text{(ii)} \quad \rho \frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial n} < 0$$

La pression motrice diminue quand on se rapproche du centre de courbure.

Si les lignes de courants sont rectilignes et parallèles, alors la pression motrice reste constante dans la direction perpendiculaire.



## 2 - Interprétation de l'équation de *Bernoulli*

### a) Interprétation en énergie

Multiplions tous les termes de l'équation de *Bernoulli* par un volume  $V$  :

$$p.V + \rho g z.V + \frac{1}{2} \rho v^2.V = C^{\text{te}} \times V$$

$p.V \Rightarrow$  travail des forces de pression : **énergie potentielle** due aux forces de pression.

$\rho g z.V = mgz \Rightarrow$  **énergie potentielle** due aux forces de pesanteur.

$\frac{1}{2} \rho v^2.V = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow$  **énergie cinétique.**

$C^{\text{te}} \times V = E_m \Rightarrow$  énergie totale : **énergie mécanique.**

Par conséquent :  $p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{E_m}{V}$  correspond à une **énergie mécanique par unité de volume** (si  $V=1$ ).

L'énergie mécanique reste alors constante le long d'une ligne de courant (il n'y a pas de dissipation d'énergie).

b) Interprétation en pression

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{\text{te}}$$

$p \Rightarrow$  **pression statique**  
(elle existe même s'il n'y a pas de mouvement)

$p + \rho g z = p^* \Rightarrow$  **pression motrice**  
(elle génère le mouvement)

$\frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow$  **pression cinétique**  
(elle résulte du mouvement)

$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_t \Rightarrow$  **pression totale (ou charge)**

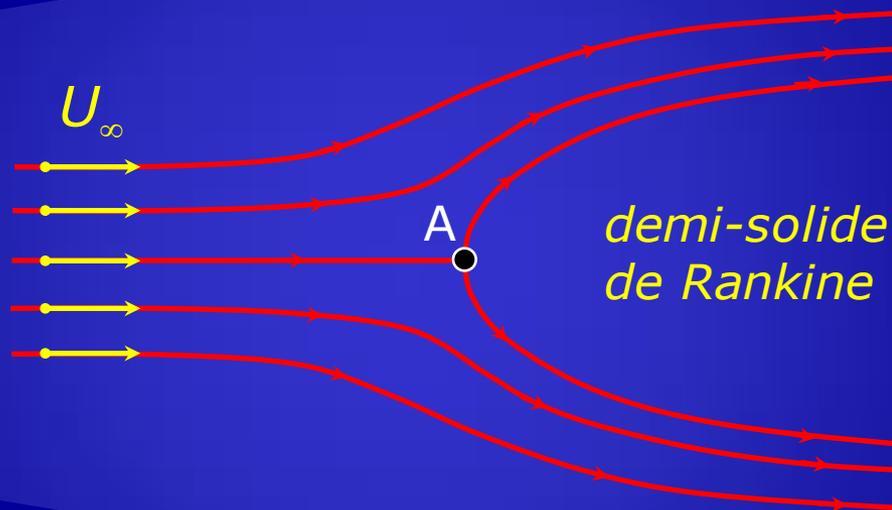
L'équation de *Bernoulli* montre alors que la charge reste constante le long d'une même ligne de courant  
( $\rightarrow$  pas de perte de charge dans l'écoulement d'un fluide parfait).

## 3 - Applications

### a) Sondes de pression - Tube de Pitot

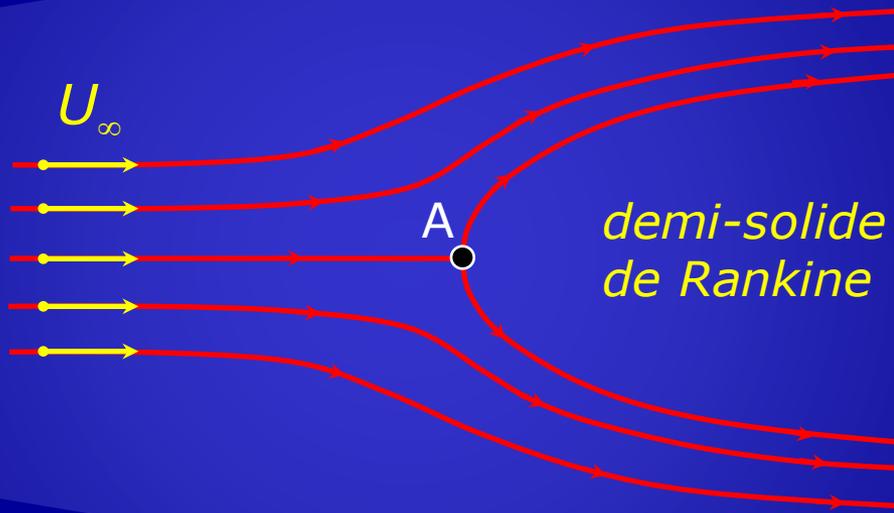
L'étude de la cinématique des écoulements a permis de montrer que des obstacles pouvaient générer un ou plusieurs point(s) d'arrêt.

Par exemple, la superposition d'un **écoulement uniforme** avec une **source** peut modéliser l'écoulement autour d'un objet appelé demi-solide de Rankine.



Ainsi, en amont de cet objet l'écoulement peut être considéré uniforme, de vitesse  $U_\infty$ .

Un point d'arrêt A est généré sur le front d'attaque de l'objet.



Le long d'une même ligne de courant on vérifie :

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{\text{te}}$$

Considérons la ligne de courant passant par le point d'arrêt et appliquons *Bernoulli* entre le point A et un point situé loin en amont :

$$p_{\infty} + \rho g z_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 = p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

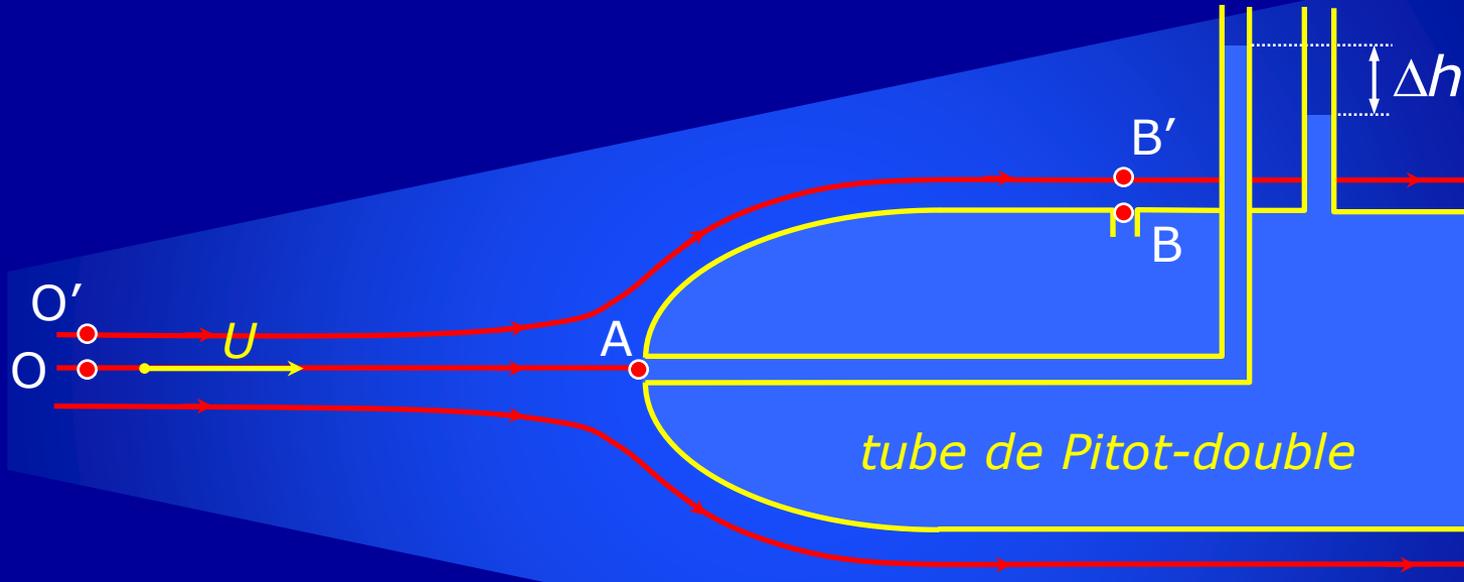
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{U_{\infty}^2} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0}$

$$\Rightarrow p_{\infty} + \rho g z_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_A + \rho g z_A$$

Et si l'écoulement a lieu dans un plan tel que  $z = C^{\text{te}}$ , alors :

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_A$$

la pression  $p_A$  est ainsi appelée **pression de stagnation**.



En O et O', l'écoulement est supposé uniforme, de vitesse  $U$ .

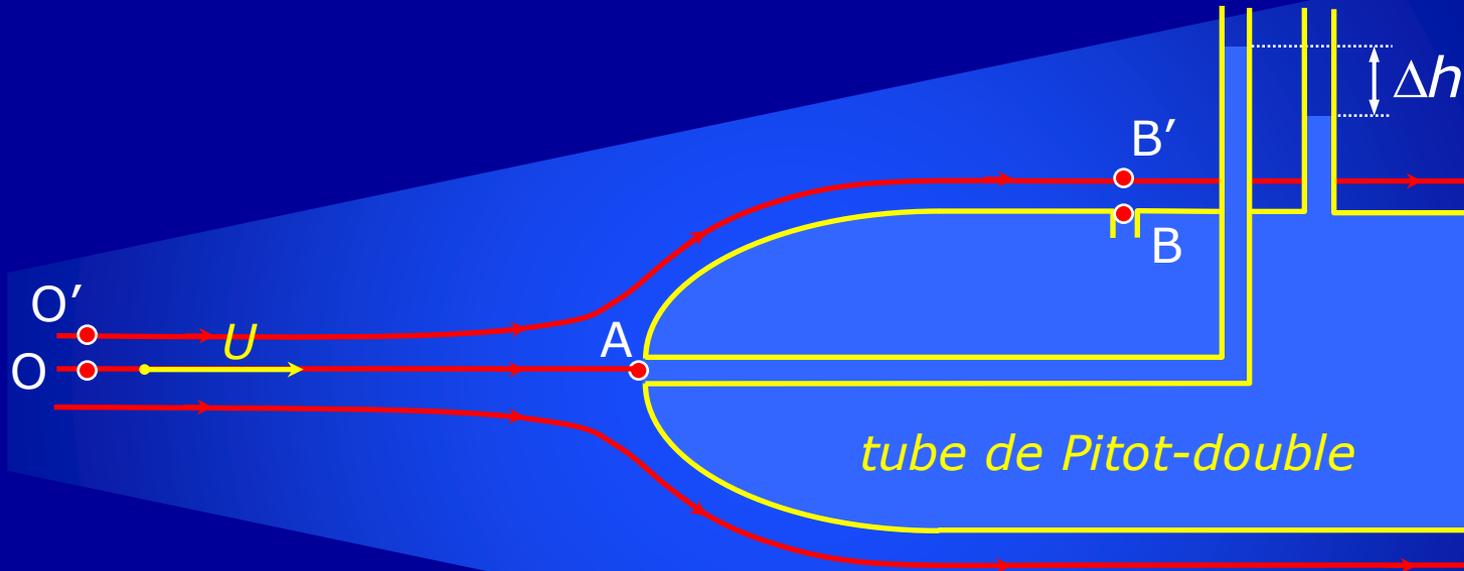
Les lignes de courant étant supposées rectilignes et parallèles, la pression est la même en O et O'  $\Rightarrow p_O = p_{O'}$

Pour les mêmes raisons, la pression est la même en B et B'  $\Rightarrow p_B = p_{B'}$

Le fluide étant immobile à l'intérieur de la sonde, la pression y est uniforme et égale à la pression en B.

$\Rightarrow$  le premier manomètre donne la pression en A  
 $\Rightarrow$  le second manomètre donne la pression en B

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \text{le premier manomètre donne la pression en A} \\ \Rightarrow \text{le second manomètre donne la pression en B} \end{array} \right\} p_A - p_B = \rho g \Delta h$$



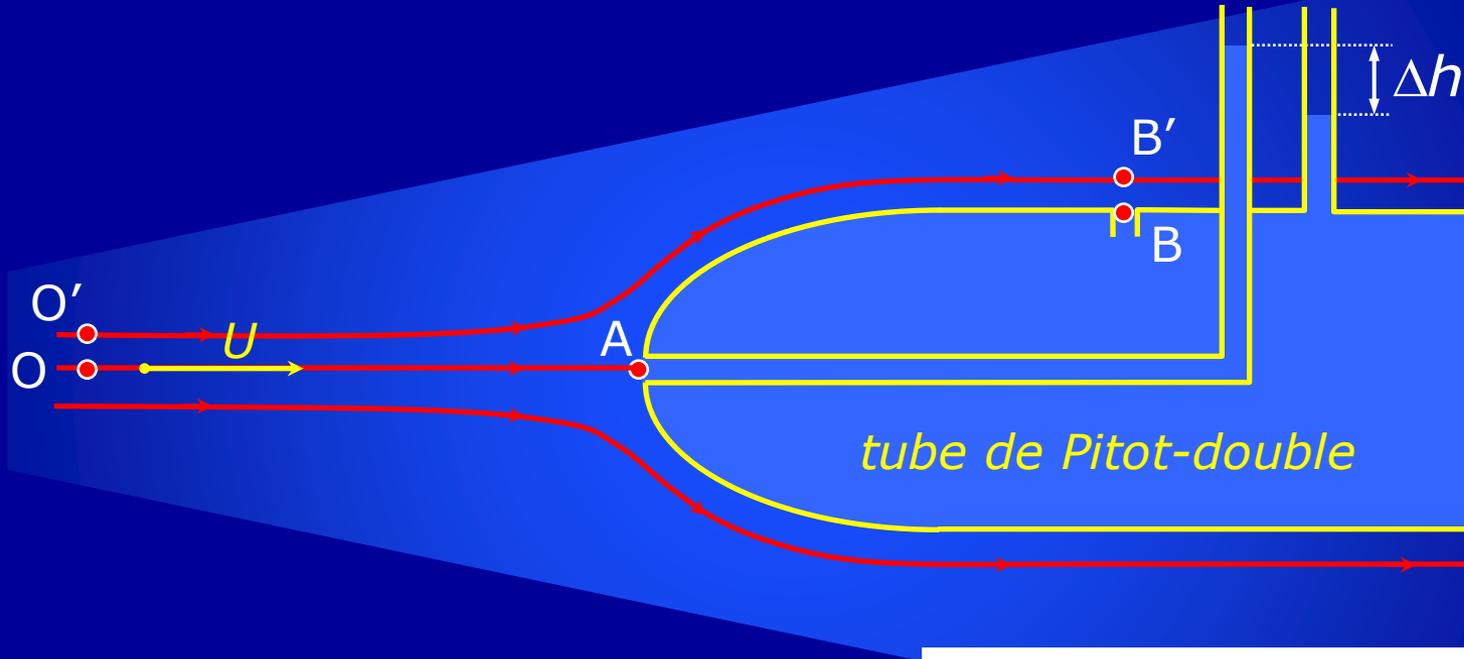
En appliquant *Bernoulli* entre O et A, on a :  $p_O + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$

Puis entre O' et B' :  $p_{O'} + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_{B'}^2$

On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement est redevenu uniforme loin après le front de l'objet :  $v_{B'} = U$

D'où :  $p_{O'} = p_{B'}$  Or, on a vu que :  $p_{O'} = p_O$  et  $p_{B'} = p_B$   
 $\Rightarrow p_O = p_B$

Par conséquent :  $p_B + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$



$$p_B + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

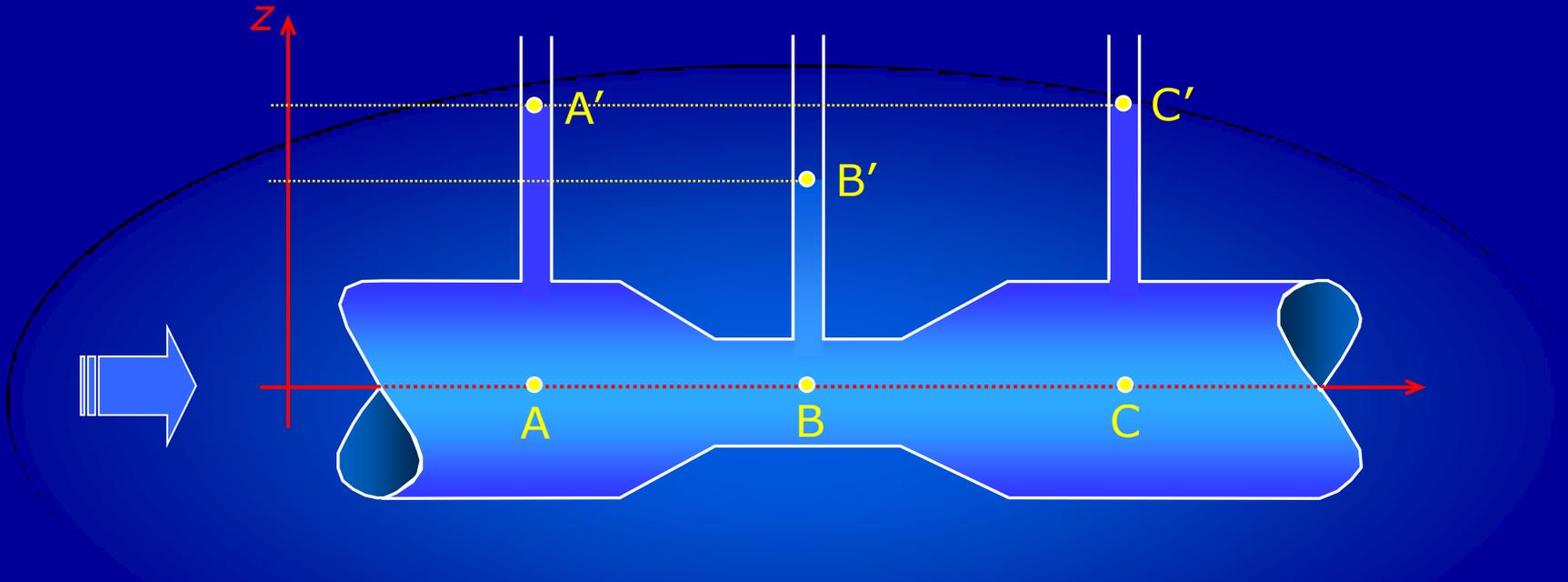
$$\Rightarrow U = \sqrt{2g\Delta h}$$

différents types de sondes de  
**Prandtl** (tubes de Pitot-doble)



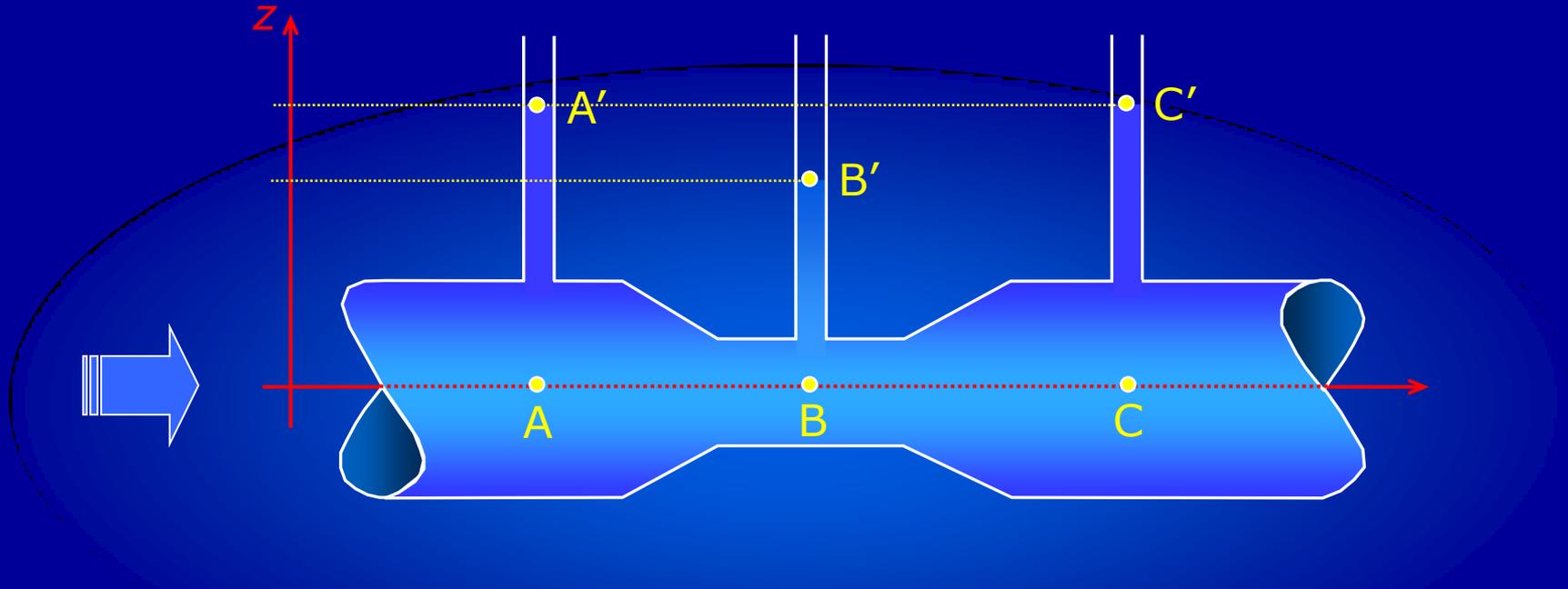
b) Phénomène de Venturi - Mesure de débit

Considérons une conduite le long de laquelle a été placé un rétrécissement :



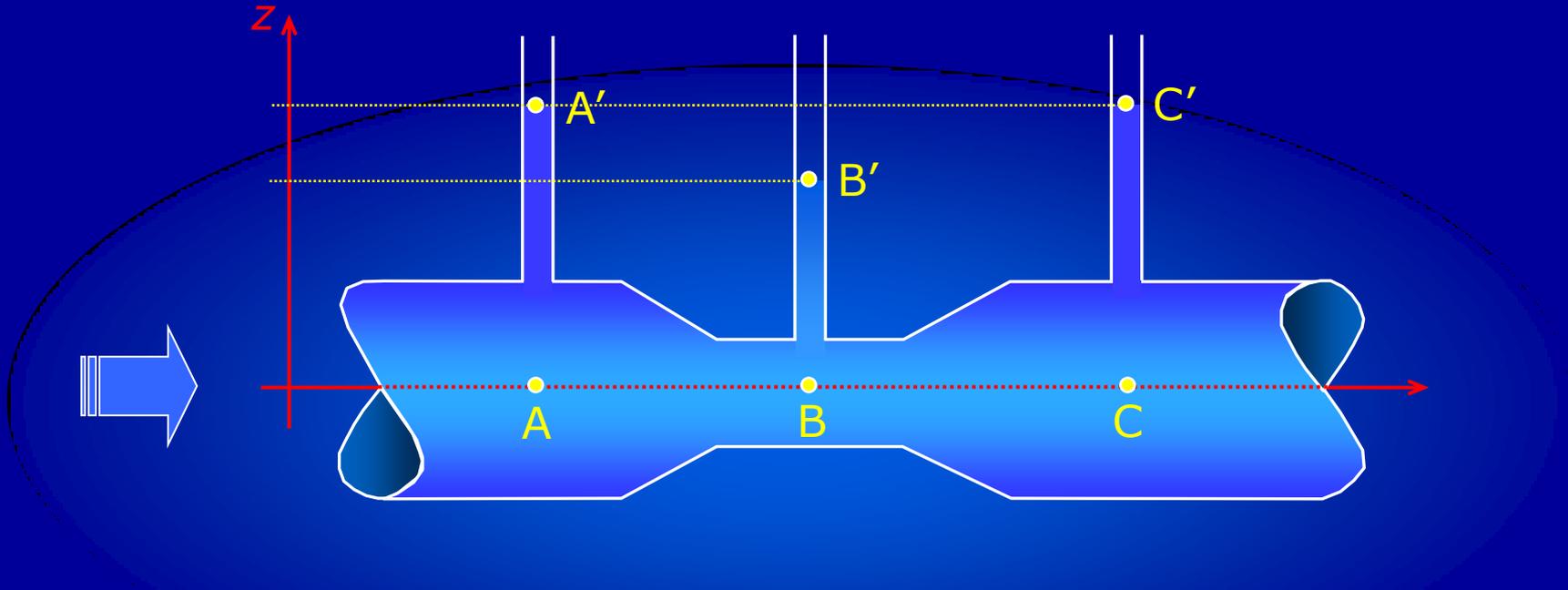
On dispose de 3 sondes de pression (manomètres) placées :

- ✧ en amont du rétrécissement  $\Rightarrow p_A$
- ✧ au niveau du rétrécissement  $\Rightarrow p_B$
- ✧ en aval du rétrécissement  $\Rightarrow p_C$  (*sonde facultative*)



En dessous chaque prises de pression, les lignes de courant peuvent être considérées rectilignes et parallèles : dans la direction perpendiculaire (suivant  $z$ ) les lois de l'hydrostatique s'appliquent à la pression :

$$\begin{cases} p_A = p_{A'} + \rho g z_{A'} \\ p_B = p_{B'} + \rho g z_{B'} \\ p_C = p_{C'} + \rho g z_{C'} \end{cases} \quad \text{où } p_{A'} = p_{B'} = p_{C'} = p_{\text{atm}}$$



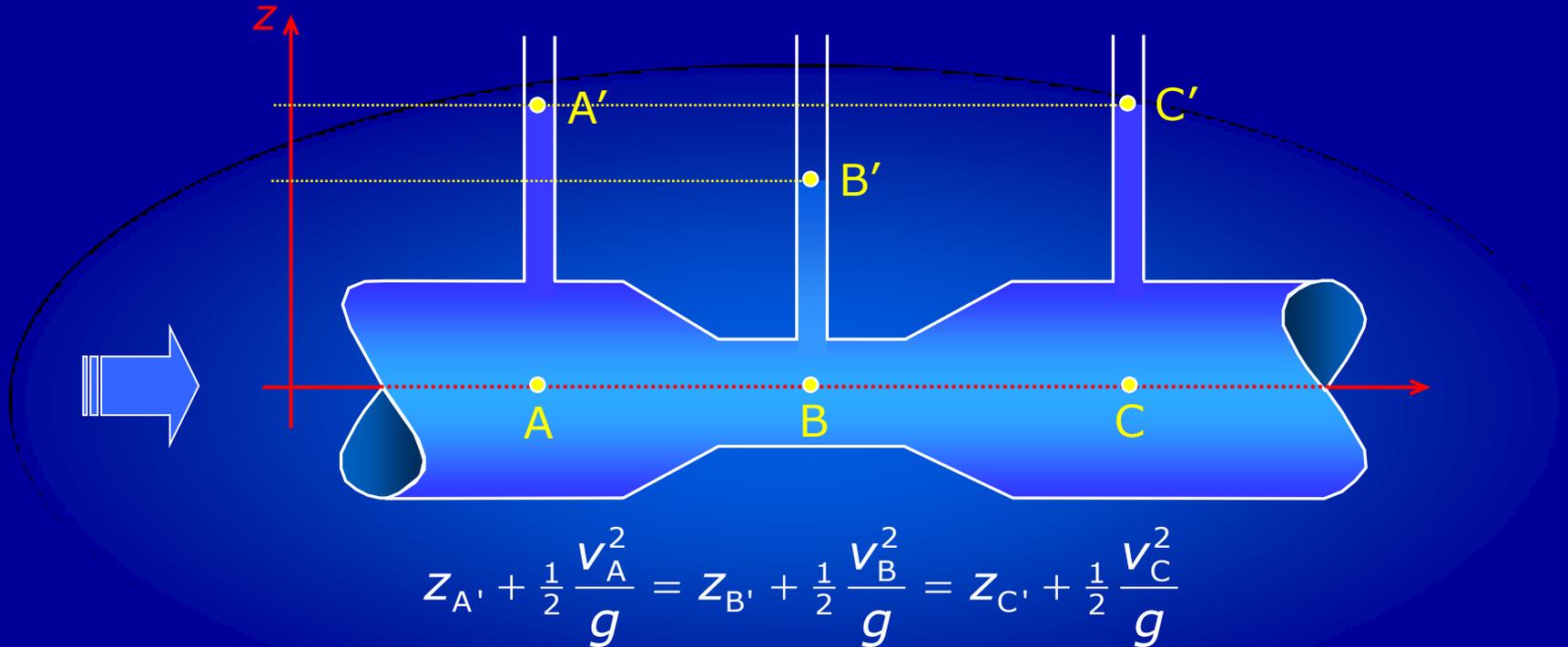
Appliquons *Bernoulli* sur la ligne de courant passant par A, B et C :

$$p_A + \cancel{\rho g z_A} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \cancel{\rho g z_B} + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_C + \cancel{\rho g z_C} + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$$z_A = z_B = z_C = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{p_A + \cancel{\rho g z_A}}_{p_{\text{atm}}} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \underbrace{p_B + \cancel{\rho g z_B}}_{p_{\text{atm}}} + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = \underbrace{p_C + \cancel{\rho g z_C}}_{p_{\text{atm}}} + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$$\Rightarrow z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2} \frac{v_C^2}{g}$$

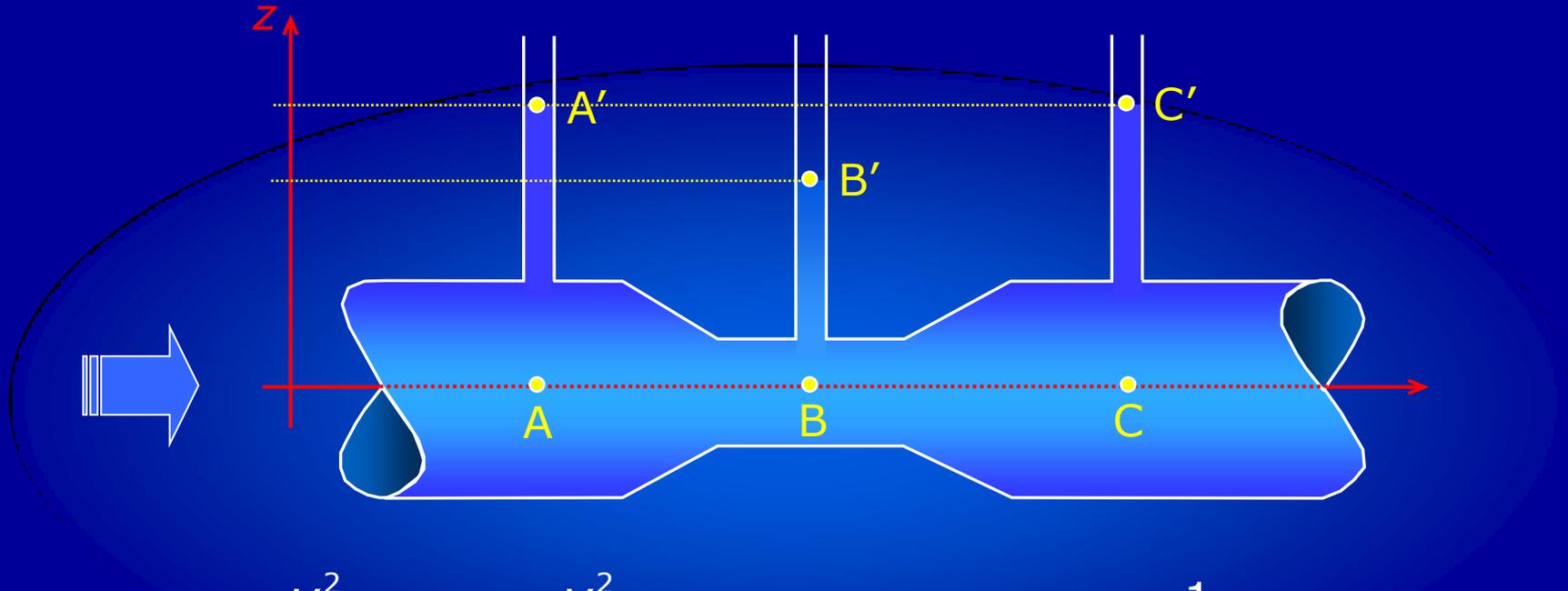


On sait par ailleurs que le débit volumique est conservé :

$$q_V = S_A v_A = S_B v_B = S_C v_C \quad (\text{en supposant la vitesse uniforme sur une même section})$$

Remarquons que :  $S_A > S_B \Rightarrow v_A < v_B \Rightarrow z_{A'} > z_{B'}$   
 (rétrécissement)      (accélération)      (dépression)

et que si  $S_A = S_C$  alors  $v_A = v_C$  et  $z_{A'} = z_{C'}$  : la 3<sup>ème</sup> sonde ne servira que pour une étude des pertes de charge (cf CH V)



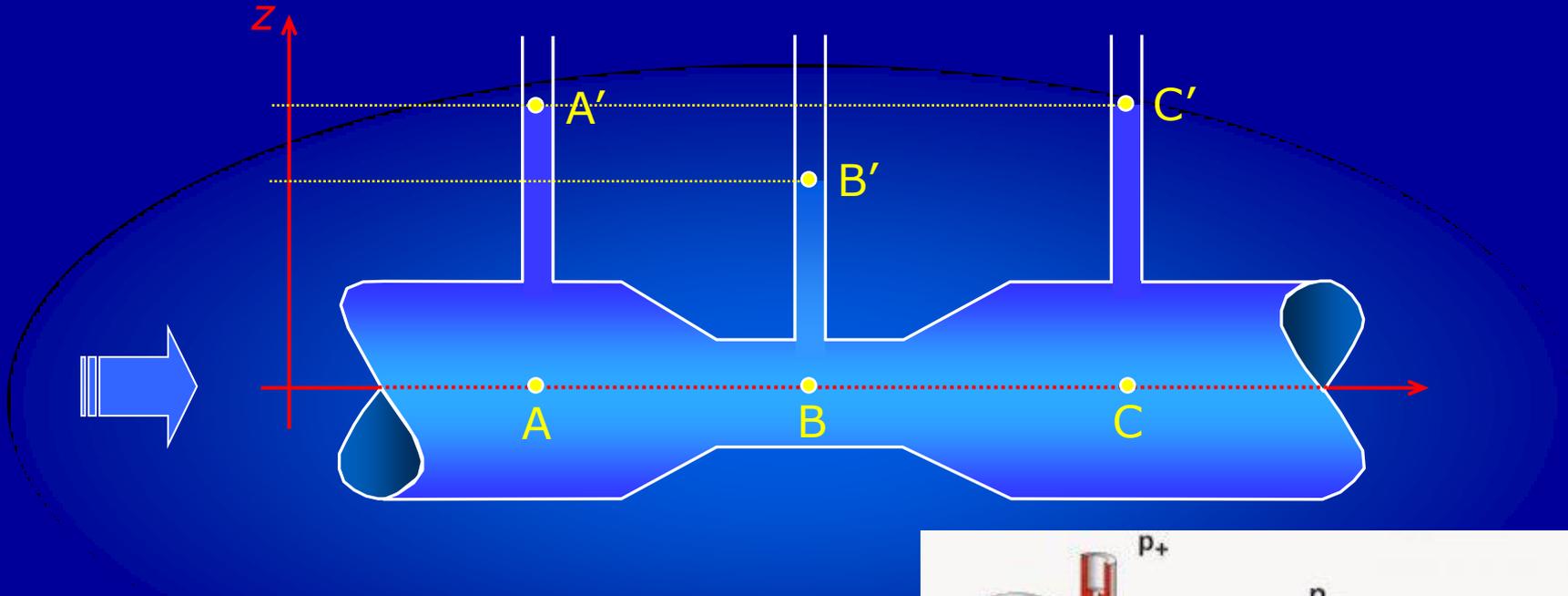
$$z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta z = z_{A'} - z_{B'} = \frac{1}{2g} (v_B^2 - v_A^2)$$

$$S_A v_A = S_B v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A \frac{S_A}{S_B}$$

$$\text{Donc : } \Delta z = \frac{1}{2g} v_A^2 \left( \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) \quad \text{soit : } v_A = \sqrt{\frac{2g\Delta z}{\left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}}$$

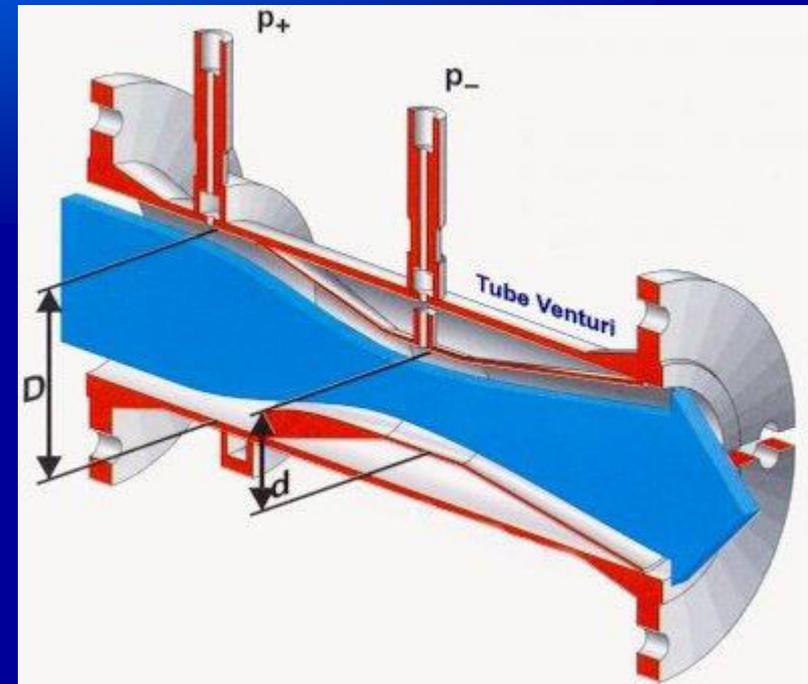
Le débit dans la conduite s'obtient par :

$$q_v = S_A \sqrt{\frac{2g\Delta z}{\left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}}$$



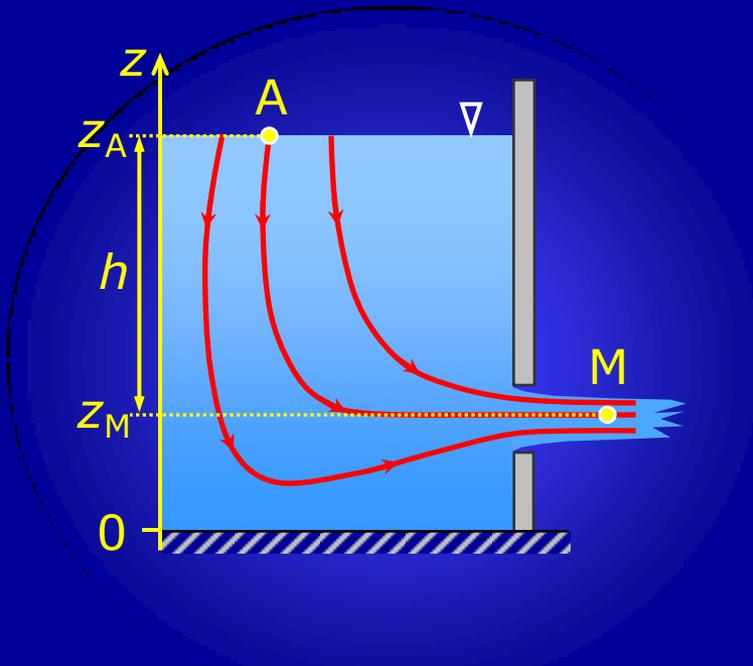
Exprimé en fonction du diamètre  $D$  de la conduite et du diamètre  $d$  du rétrécissement, le débit s'exprime :

$$q_v = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(D/d)^4 - 1}}$$



c) Ecoulement par orifice - Formule de *Torricelli*

Considérons la vidange d'un réservoir par un orifice placé sous la surface libre :



Appliquons *Bernoulli* entre un point A de la surface libre et un point M du jet :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_M + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2$$

Hypothèse : dans le jet, les lignes de courant sont rectilignes parallèles, donc dans la direction transverse on peut y appliquer les lois de l'hydrostatique. Les variations d'altitude étant négligeables, **la pression statique** peut alors être considérée **uniforme dans tout le jet**.

Comme il n'y a pas de discontinuité de pression à l'interface jet-atmosphère, **la pression statique dans le jet est égale à la pression atmosphérique**.

Par conséquent :  $p_A = p_M = p_{\text{atm}}$

$$\begin{aligned}
 \cancel{p_A} + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 &= \cancel{p_M} + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2 \\
 \downarrow p_{atm} \quad \quad \quad \downarrow p_{atm} &\Rightarrow \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2
 \end{aligned}$$

Hypothèse : la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet.

$$\Rightarrow v_A \ll v_M$$

Par conséquent :

$$\underbrace{\rho g(z_A - z_M)}_h = \frac{1}{2} \rho (v_M^2 - v_A^2) \approx \frac{1}{2} \rho v_M^2$$

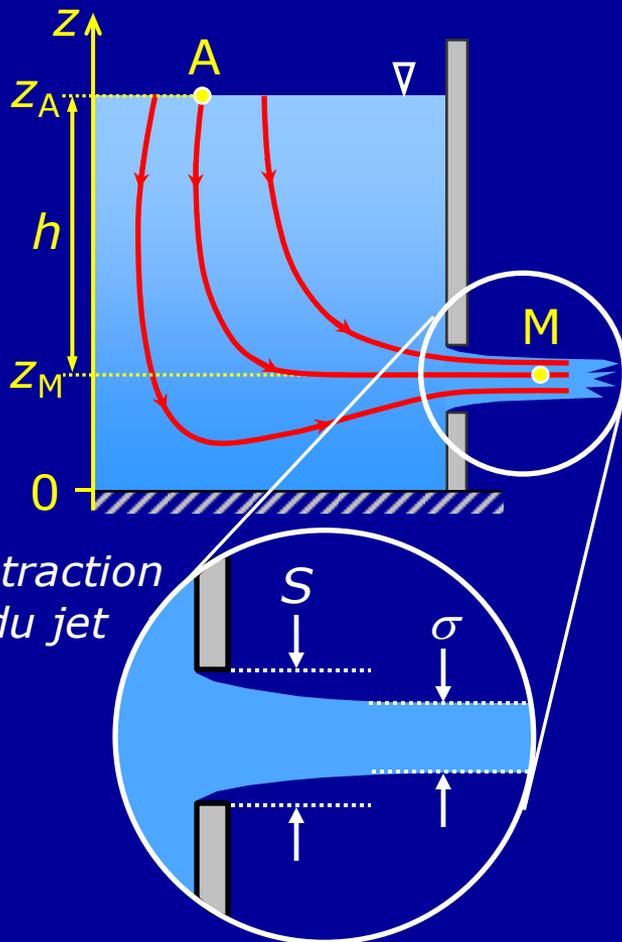
$$\Rightarrow v_M = \sqrt{2gh}$$

**formule de Torricelli**

Calcul du débit :

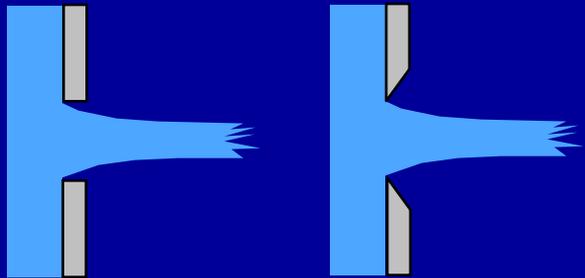
$$q_v = \sigma v_M = \sigma \sqrt{2gh} \quad \text{où } \sigma = C_c S$$

coefficient de contraction

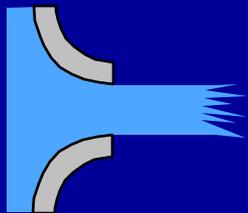


contraction  
du jet

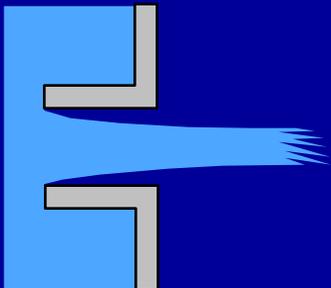
Le coefficient de contraction dépend de la géométrie de l'orifice.  
De manière générale,  $C_c$  est déterminé expérimentalement et tabulé :



***parois minces***  $C_c = 0,61$



***orifice à bords profilés***  $C_c = 1,00$



***orifice à bords rentrants***  $C_c = 0,50$

## d) Phénomène de cavitation

Le phénomène de cavitation correspond à la **formation de bulles de vapeur** au sein d'un liquide en mouvement.

En conséquence de l'équation de *Bernoulli*, quand la vitesse augmente la pression diminue. Si pression tombe en dessous de la **pression de vapeur saturante**, alors le liquide s'évapore  $\Rightarrow$  formation de bulles.

En pratique, et dans la plupart des cas, ce phénomène est gênant.  
Par exemple :

- ✧ la cavitation est consommatrice d'énergie  
énergie consommée pour la formation des bulles (transition de phase)  
+ contraintes
- ✧ la cavitation est à l'origine de la détérioration prématurée des hélices de navires

Les bulles créées par cavitation migrent spontanément vers les zones où la pression du fluide est plus élevée : elles éclatent et le choc mécanique engendre des détériorations.



# CH IV — Dynamique des Fluides Réels —

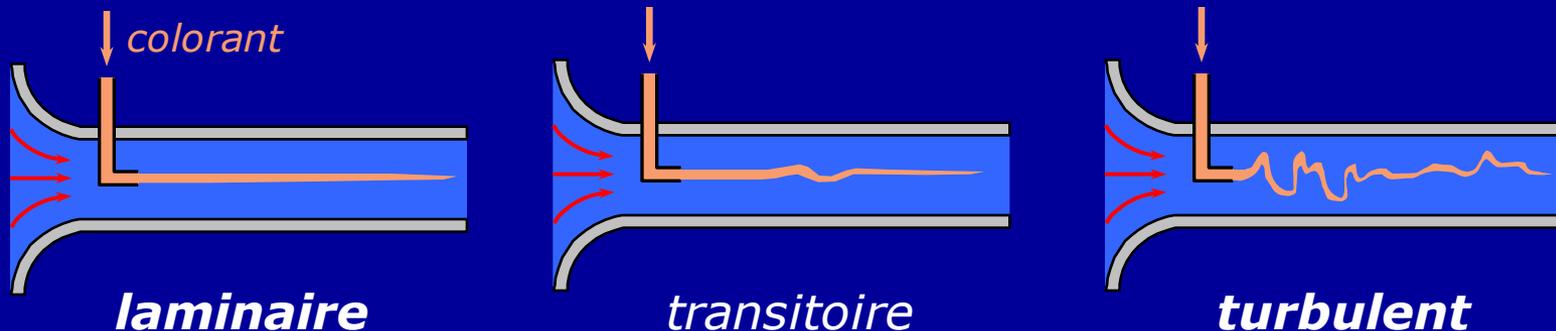
## 1 - Généralités

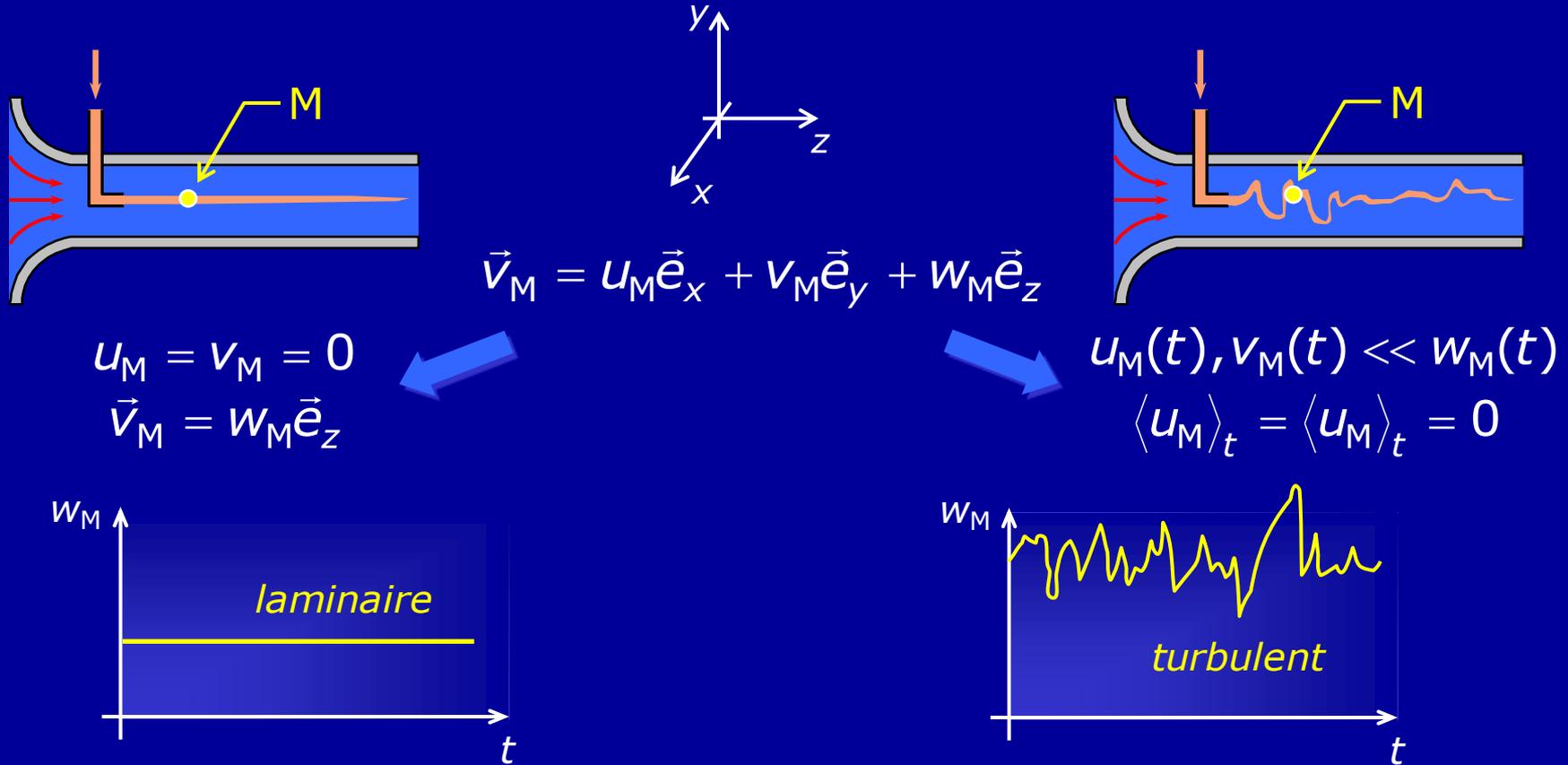
Etudier l'écoulement d'un fluide réel revient à résoudre l'équation de *Navier-Stokes*.

Mais en pratique, cette équation ne peut se résoudre analytiquement qu'en posant des hypothèses simplificatrices.

Notamment, on va devoir distinguer deux grands types d'écoulement :

en ***régime laminaire*** ou en ***régime turbulent***





En régime **laminaire**, on pourra **généraliser l'équation de Bernoulli** en introduisant la notion de *pertes de charge* dues à la viscosité.

En régime **turbulent**, on devra utiliser des **relations empiriques** généralement déterminées expérimentalement.

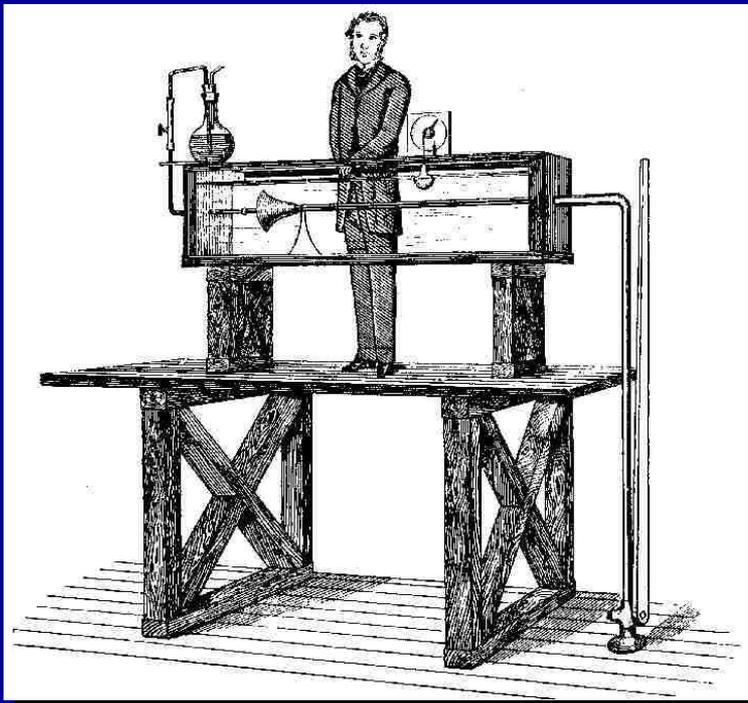
Comment caractériser le régime d'un écoulement ?

⇒ c'est le résultat des travaux d'O. Reynolds :

Il a réalisé une étude systématique du régime d'écoulement en fonction des différents paramètres intervenant dans le problème :

*débit, viscosité, géométrie de la conduite...*

Il a ainsi montré que la transition du régime laminaire au régime turbulent ne dépend pas séparément de chacun des paramètres mais d'**une seule grandeur les regroupant tous.**

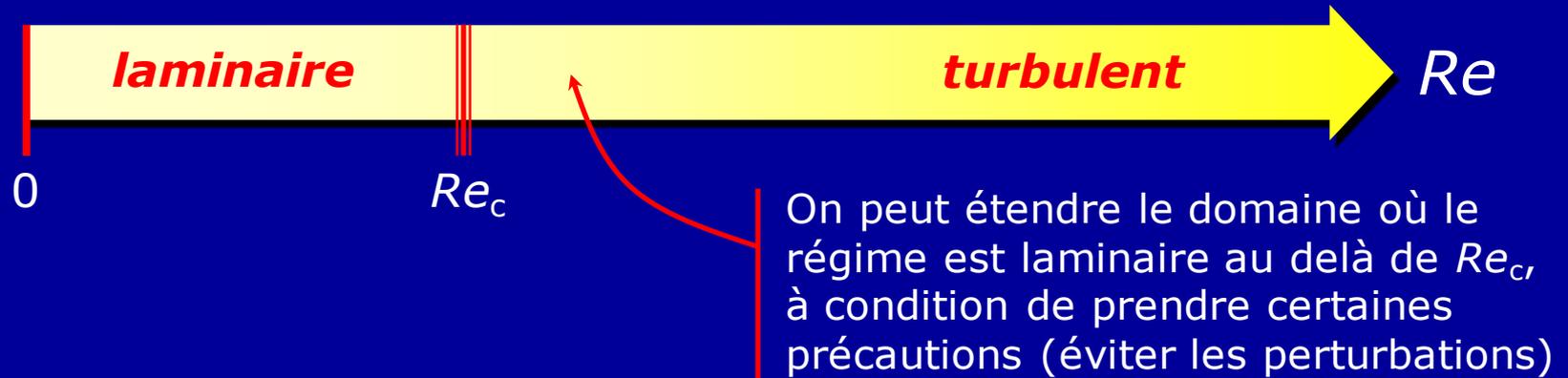


↳ *le nombre de Reynolds*

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho : \text{masse volumique } [\rho] = \text{M.L}^{-3} \\ \mu : \text{viscosité } [\mu] = \text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-1} \\ \nu : \text{viscosité cinématique } [\nu] = \text{L}^2.\text{T}^{-1} \\ v : \text{vitesse } [v] = \text{L.T}^{-1} \\ D : \text{diamètre } [D] = \text{L} \end{array} \right\} [Re] = 0$$

- ✧ Le nombre de Reynolds est donc une grandeur sans dimension.
- ✧ La transition d'un régime laminaire à un régime turbulent s'observe pour  $Re \approx 2000 = Re_c$  (**nombre de Reynolds critique**)



- ✧ En tout état de cause, on sait que l'écoulement est laminaire si son nombre de Reynolds est inférieur à 2000 (quelles que soient les perturbations subies par le système).

## 2 - Ecoulement laminaire & Pertes de charge régulières

Partons de l'équation de *Navier-Stokes* obtenue pour un fluide newtonien incompressible :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Pour un écoulement stationnaire, on a :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}v^2 - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla}v^2 - \rho \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla}p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

$$\vec{\nabla}(\frac{1}{2} \rho v^2) - \rho \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla}p + \mu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

$$\vec{\nabla}(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) = \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

$$= \mu \Delta \vec{v} + 2\rho \vec{v} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\vec{\nabla}(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) = \mu \Delta \vec{v} + 2\rho \vec{v} \wedge \vec{\Omega}$$

Projetons cette égalité vectorielle le long d'une ligne de courant :

$$\vec{\nabla}(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) \cdot ds \vec{e}_s = [\mu \Delta \vec{v} + 2\rho \vec{v} \wedge \vec{\Omega}] \cdot ds \vec{e}_s$$

$$(\vec{v} \wedge \vec{\Omega}) \cdot \vec{e}_s = 0$$

$\perp \vec{v}$       $// \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) \cdot ds \vec{e}_s = \mu \Delta \vec{v} \cdot ds \vec{e}_s$$

Puis projetons sur chacun des 3 axes d'un repère cartésien :

$$\left. \begin{aligned} ds \vec{e}_s &= dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \\ \vec{\nabla}(\cdot) &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \vec{e}_z \\ \Delta \vec{v} &= \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) dx = \mu \Delta v_x dx \\ \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) dy = \mu \Delta v_y dy \\ \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) dz = \mu \Delta v_z dz \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) = \mu \Delta v_x \\ \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) = \mu \Delta v_y \\ \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2) = \mu \Delta v_z \end{cases}$$

Supposons alors que l'écoulement laminaire s'effectue suivant l'axe  $x$ .  
Dans ces conditions, on a :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = v \vec{e}_x \quad \text{et si on pose : } p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P_t}{\partial x} = \mu \Delta v \\ \frac{\partial P_t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P_t}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_t(x, y, z) = P_t(x) \\ \frac{dP_t}{dx} = \mu \Delta v \end{cases}$$



**charge  
(pression totale)**

$$\frac{dP_t}{dx} = \mu \Delta v = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

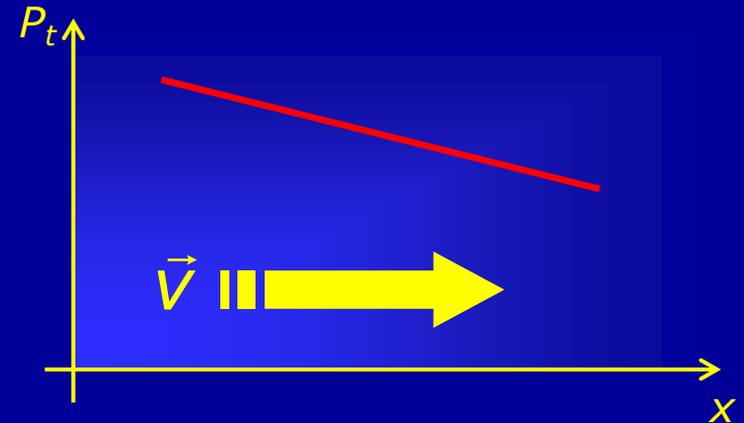
Mais d'après l'équation de continuité :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

D'où :  $\frac{dP_t}{dx} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = C^{te} \nabla^2(x, y, z)$

fonction  
de x

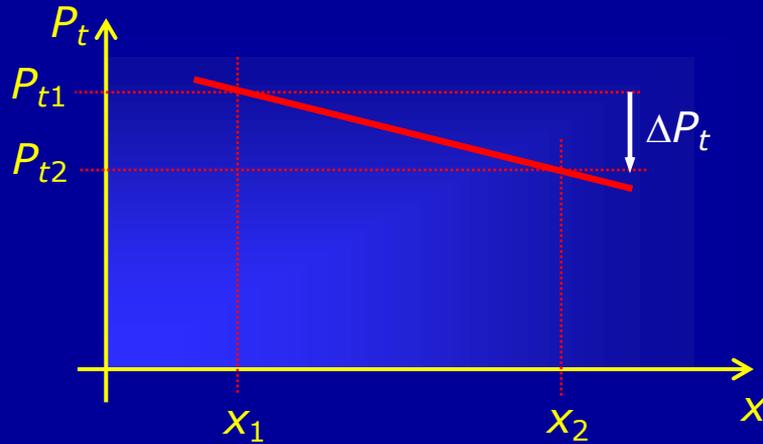
fonction  
de y et z



On peut en déduire que la **charge varie linéairement** avec la distance parcourue par le fluide.

$$\frac{dP_t}{dx} = C^{te} < 0$$

*on peut déjà supposer que que la charge diminue avec la progression de l'écoulement.*



$$P_{t1} = P_{t2} + \Delta P_t$$

$$\frac{dP_t}{dx} = \frac{P_{t2} - P_{t1}}{x_2 - x_1} = -\frac{\Delta P_t}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \Delta P_t = -\frac{dP_t}{dx} (x_2 - x_1) > 0$$

$$C^{te} < 0$$

$$P_{t1} = P_{t2} - \frac{dP_t}{dx} (x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2}_{\text{pression totale en (1)}} = \underbrace{p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2}_{\text{pression totale en (2)}} - \underbrace{\frac{dP_t}{dx} (x_2 - x_1)}_{\text{perte de charge régulière}}$$

pression totale  
en (1)

pression totale  
en (2)

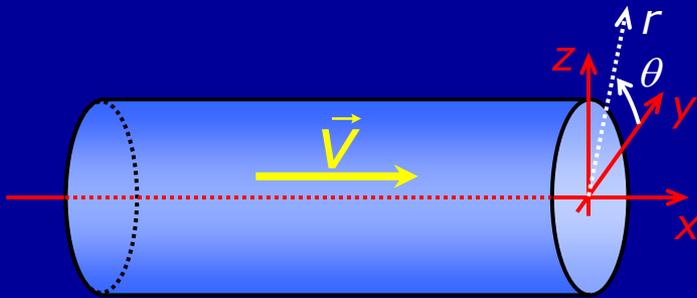
perte de charge  
régulière

$$\Delta P_t > 0$$

Il reste alors à caractériser le gradient de pression totale  $\frac{dP_t}{dx}$ .

### 3 - Ecoulement de *Poiseuille*

Considérons l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite cylindrique, de rayon  $R$ , posée à l'horizontale :



$$\vec{v} = v \vec{e}_x \Rightarrow v_r = v_\theta = 0$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\frac{dP_t}{dx} = \mu \Delta v$$

Par ailleurs, l'équation de continuité impose :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Et la géométrie du système est telle qu'il y a symétrie de révolution :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad \text{Donc, finalement : } v(x, r, \theta) = v(r)$$

Par conséquent, le *Laplacien* s'exprime comme :

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

0                      0

Et il s'en suit :

$$\frac{dP_t}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = C^{\text{te}} = A$$

fonction de x
fonction de r

Il est alors possible d'en déduire le profil de vitesse  $v(r)$  par simple intégration :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{A}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{A}{\mu} r \quad \Rightarrow \quad r \frac{dv}{dr} = \frac{A}{\mu} \frac{r^2}{2} + B$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{A}{\mu} \frac{r}{2} + \frac{B}{r} \quad \Rightarrow \quad v(r) = \frac{A}{\mu} \frac{r^2}{4} + B \ln r + C$$

$$v(r) = \frac{A}{\mu} \frac{r^2}{4} + B \ln r + C$$

Constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites

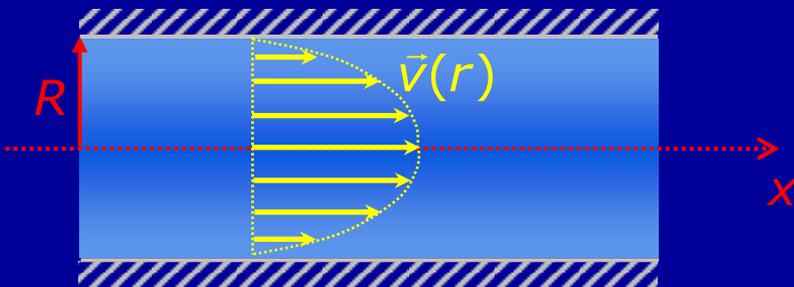
Au contact des parois de la conduite, en  $r = R$ , le fluide est immobile :

$$v(R) = 0 \Rightarrow \frac{A}{\mu} \frac{R^2}{4} + B \ln R + C = 0$$

Sur l'axe de la conduite, en  $r=0$ , la vitesse est nécessairement de valeur finie :

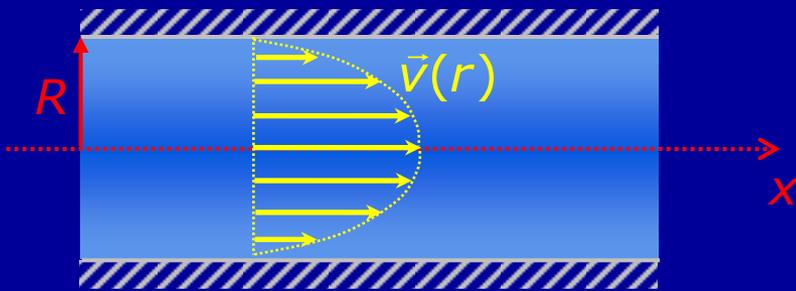
$$v(0) \neq \infty \Rightarrow B \ln 0 + C \neq \infty \Rightarrow B = 0$$

D'où :  $B = 0$  et  $C = -\frac{A}{\mu} \frac{R^2}{4} \Rightarrow v(r) = -\frac{A}{4\mu} (R^2 - r^2)$



**profil de vitesse  
parabolique**

Remarque : pour avoir  $v(r) > 0 \forall r < R$ , il faut que  $A < 0$



$$v(r) = -\frac{A}{4\mu}(R^2 - r^2)$$

avec  $A = \frac{dP_t}{dx} < 0$

*La pression totale (la charge) diminue avec la progression du fluide*

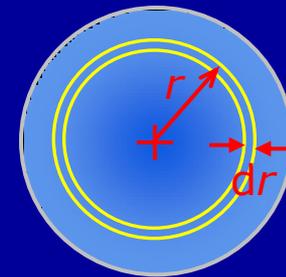
Calcul du débit volumique à travers une section du tube :

$$dq_v = v(r)dS \quad \text{où} \quad dS = 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow q_v = \int_0^R v(r)2\pi r dr = -\frac{A}{4\mu} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2)r dr$$

$$q_v = -2\pi \frac{A}{4\mu} \left[ R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = -2\pi \frac{A}{4\mu} \frac{R^4}{4} = -\pi \frac{A}{8\mu} R^4 \quad \text{où} \quad A = \frac{dP_t}{dx} \quad \text{et} \quad R = \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow q_v = -\frac{\pi}{128\mu} \left( \frac{dP_t}{dx} \right) D^4$$



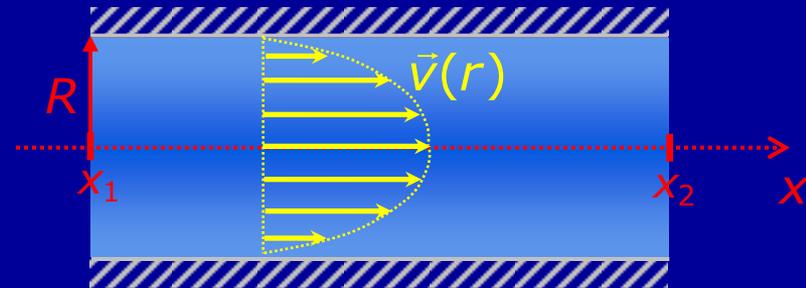
On peut alors définir une vitesse moyenne de l'écoulement :

$$v_m = \frac{q_v}{S}$$

Par ailleurs, si l'on considère une conduite de longueur  $L$ , la perte de charge totale s'exprime :

$$\Delta P_t = P_{t_1} - P_{t_2} = \int_2^1 \left( \frac{dP_t}{dx} \right) dx$$

↖ C<sup>te</sup>



$$\Rightarrow \Delta P_t = \left( \frac{dP_t}{dx} \right) \int_2^1 dx = \left( \frac{dP_t}{dx} \right) \underbrace{(x_1 - x_2)}_{-L} \Rightarrow \Delta P_t = - \left( \frac{dP_t}{dx} \right) L$$

Remarque : on constate que la perte de charge est proportionnelle à la distance parcourue → on dit que **la perte de charge est régulière**.

Or, on a trouvé l'expression du débit :  $q_v = - \frac{\pi}{128\mu} \left( \frac{dP_t}{dx} \right) D^4$

$$\Rightarrow q_v = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta P_t}{L} D^4$$

il s'agit de la **formule de Poiseuille**

On peut encore exprimer la perte de charge totale en fonction du débit ou de la vitesse moyenne de l'écoulement :

$$q_v = v_m S = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta P_t}{L} D^4 \quad \Rightarrow \quad \Delta P_t = 128\mu L v_m \frac{S}{\pi D^4} = 128\mu L v_m \frac{\pi D^2/4}{\pi D^4}$$

$$\Rightarrow \Delta P_t = \frac{32\mu L v_m}{D^2}$$

## 4 - Coefficient de perte de charge

Il est d'usage d'exprimer la perte de charge en fonction de la pression cinétique de l'écoulement dans la conduite :  $\frac{1}{2} \rho v_m^2$

Dans ce cas :

$$\Delta P_t = \frac{32\mu L v_m}{D^2} = \underbrace{\left( \frac{32\mu L v_m}{D^2} \cdot \frac{2}{\rho v_m^2} \right)}_{\frac{64\mu L}{\rho D^2 v_m}} \frac{1}{2} \rho v_m^2$$

$$\frac{64\mu L}{\rho D^2 v_m} = \frac{64\mu}{\rho v_m D} \frac{L}{D} = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} = \lambda \frac{L}{D}$$

Donc, pour un écoulement **laminaire** dans une conduite, on a :

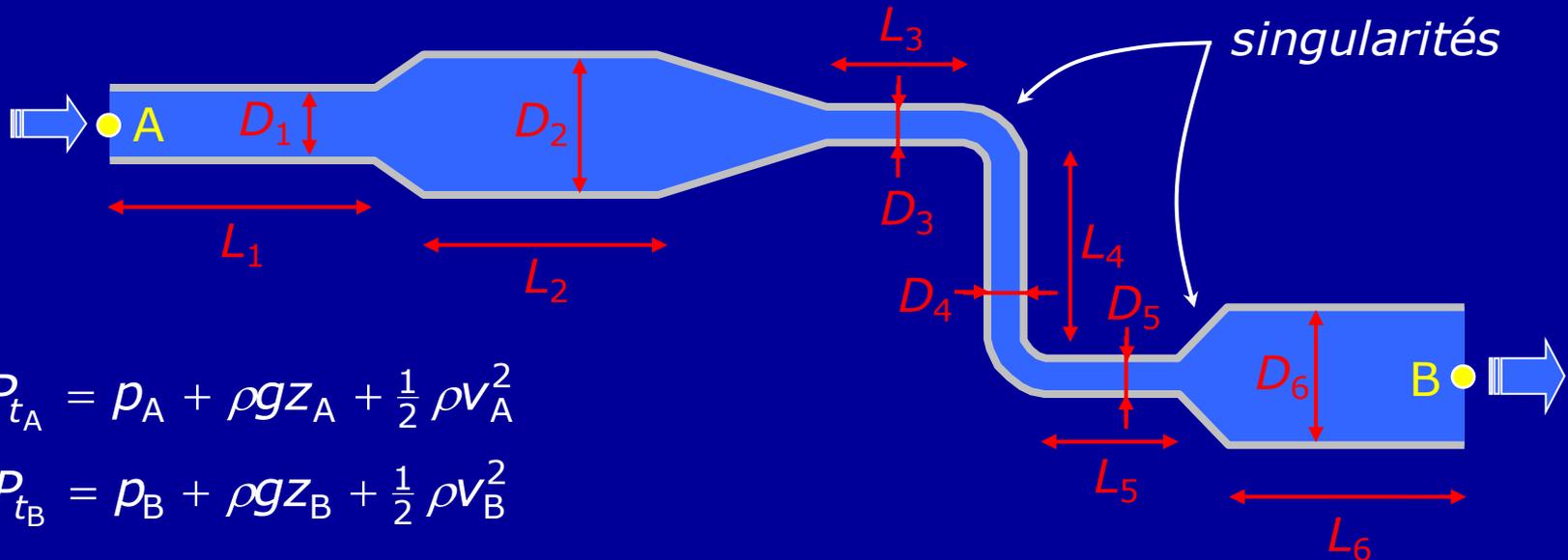
$$\Delta P_t = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho v_m^2$$

où  $\lambda = \frac{64}{Re}$  est le **coefficient de perte de charge régulière**.

*coefficient sans dimension*

Remarque : ceci n'est valide que pour  $Re < 2000$ .

On peut alors généraliser l'équation de *Bernoulli* :



$$P_{t_A} = p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

$$P_{t_B} = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$\Delta P_t = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \dots + \lambda_6 \frac{L_6}{D_6} \frac{1}{2} \rho v_6^2 + \text{pertes de charge singulières}$$

$$P_{t_A} = P_{t_B} + \Delta P_t$$

$$\Rightarrow p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2} \rho v_i^2 + \text{pertes singulières}$$

**équation de *Bernoulli* généralisée**

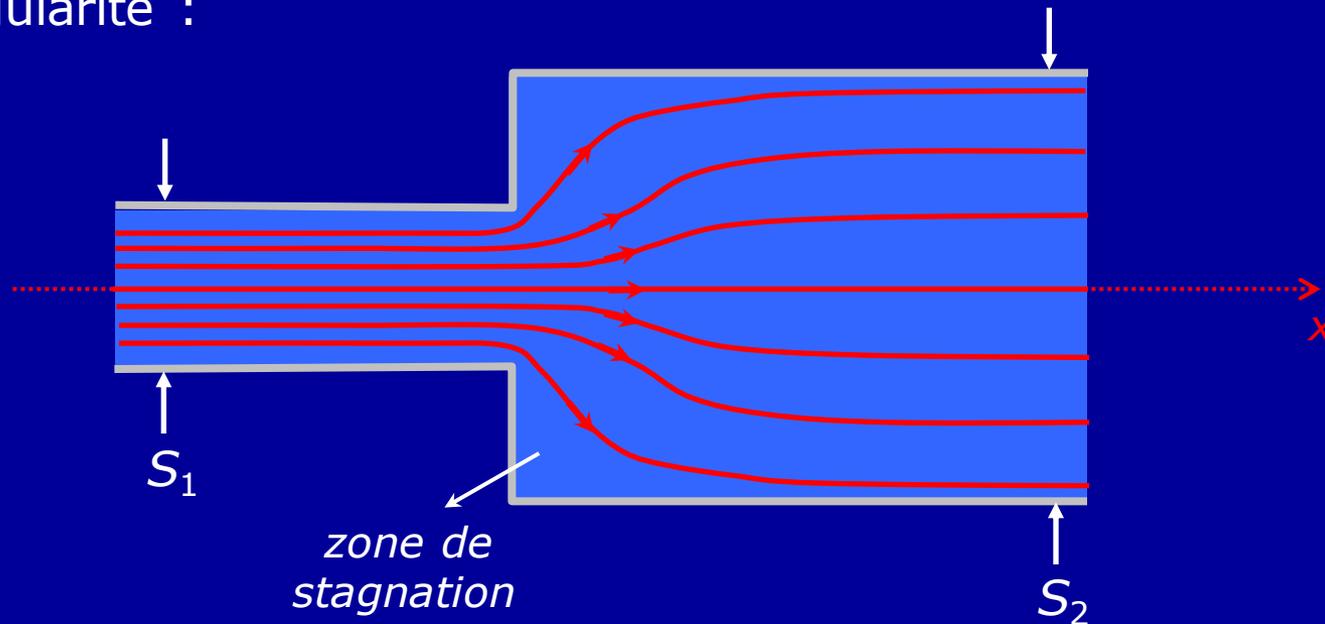
$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2} \rho v_i^2 + \text{pertes singulières}$$

Remarque : cette équation reste valable même si l'écoulement n'est pas laminaire ( $Re > 2000$ ) ; la seule différence réside en l'expression du coefficient de perte de charge régulière qui doit être **déterminé expérimentalement** ou **tiré d'abaques** ( $\lambda \neq 64/Re$ ).

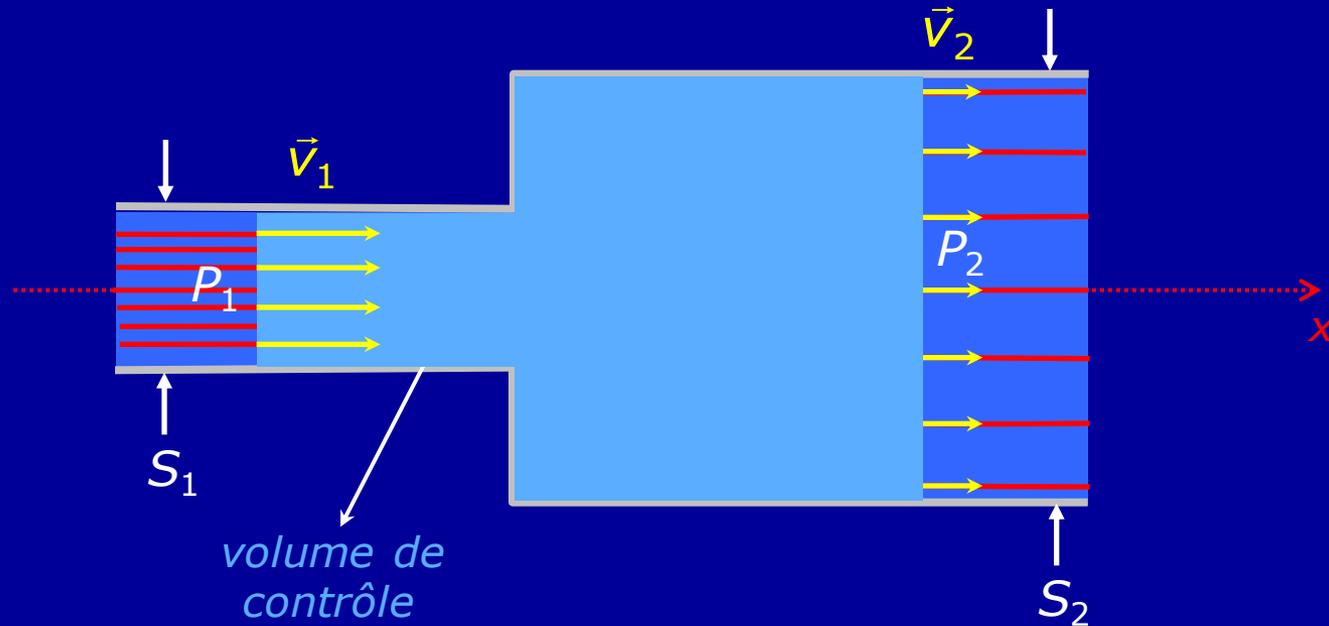
Il nous reste alors à étudier les pertes de charge dues aux singularités...

## 5 - Pertes singulières - Théorème de *Bélangier*

Considérons l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite horizontale présentant un élargissement brusque, ce qui constitue une singularité :



Dû à son inertie, le fluide ne suit pas complètement les changements brusques de direction : il se crée des **zones de turbulences** où il y a dissipation d'énergie. Ces zones, où le fluide est globalement stagnant, sont responsables de **pertes de charge singulières**.

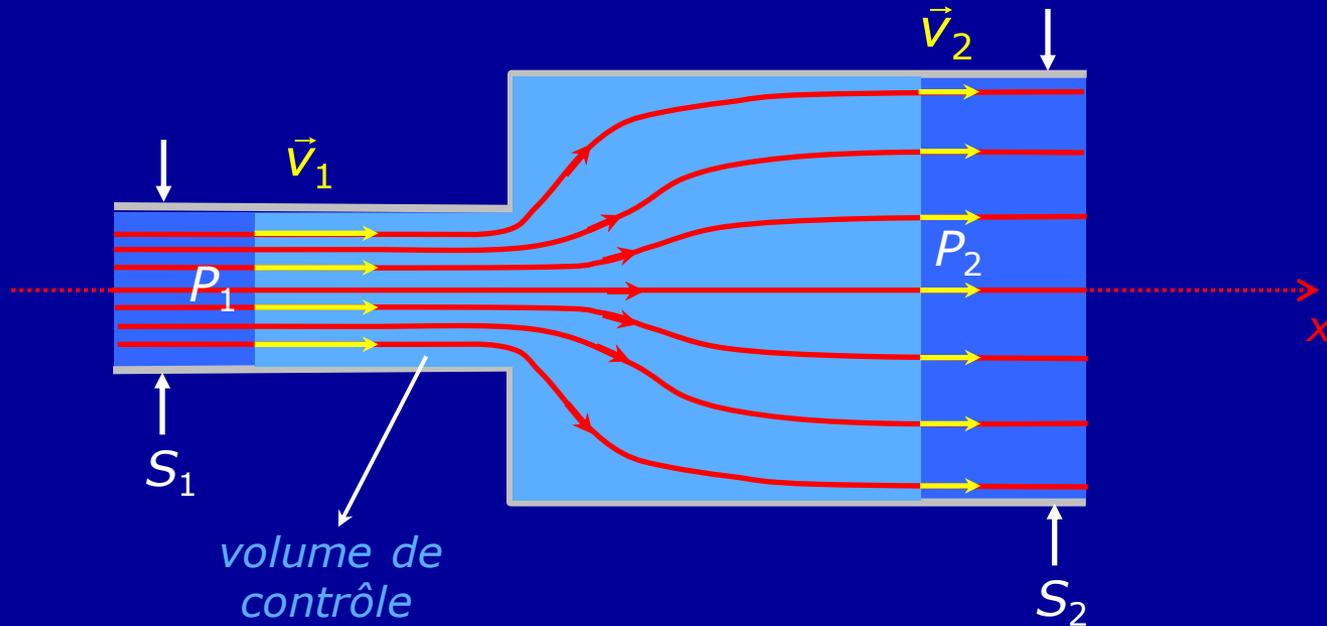


On choisit un volume de contrôle sur lequel on applique le théorème d'Euler.

On supposera que sur une même section (en amont et en aval du rétrécissement) les vitesses et pressions sont uniformes  $\rightarrow$  on néglige donc les pertes de charge régulières au cours du rétrécissement.

Dans ces conditions, par projection sur l'axe  $x$ , on obtient :

$$q_m(v_2 - v_1) = \text{projection sur } x \text{ de la résultante des forces exercées sur le volume de contrôle.}$$



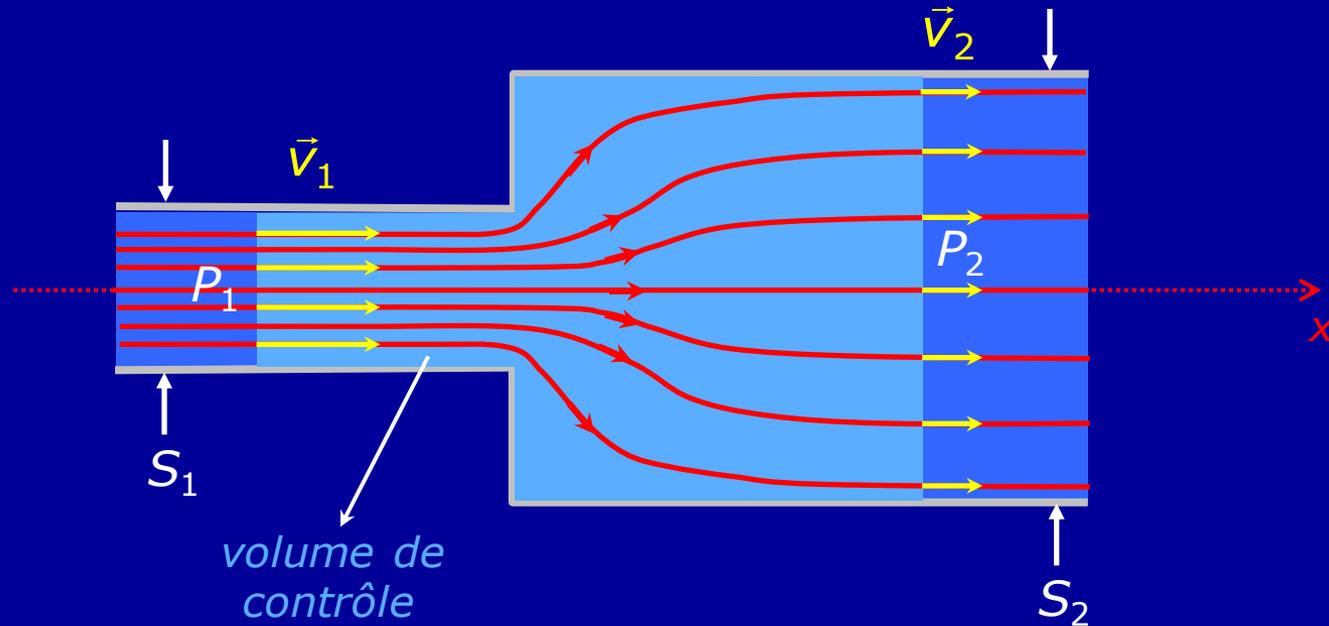
$q_m(v_2 - v_1) =$  projection sur  $x$  de la résultante des forces exercées sur le volume de contrôle.

✧ poussée en amont :  $+ P_1 S_1$

✧ contre-poussée en aval :  $- P_2 S_2$

✧ poussée de la paroi verticale sur la partie stagnante du fluide :  
 $+ P(S_2 - S_1)$  où  $P = P_1$  (lois de l'hydrostatique)

$$\Rightarrow q_m(v_2 - v_1) = P_1 S_1 - P_2 S_2 + P_1(S_2 - S_1) = (P_1 - P_2)S_2$$



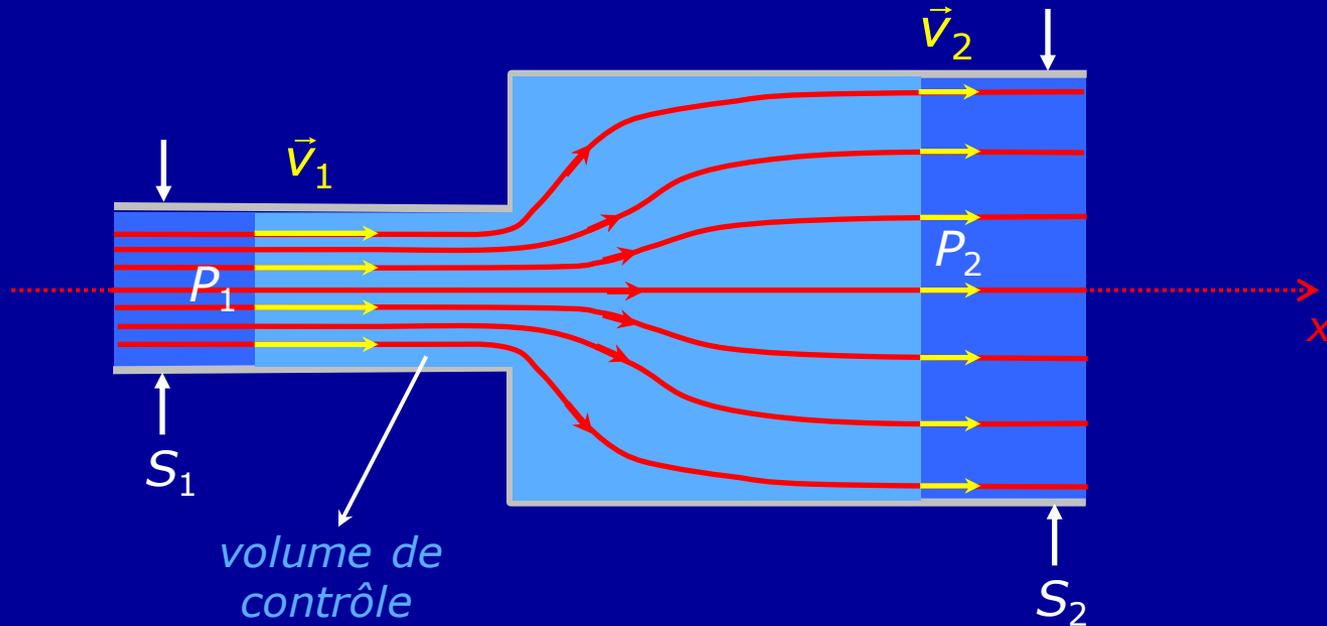
$$q_m(v_2 - v_1) = (P_1 - P_2)S_2$$

Or, le fluide étant supposé incompressible, on doit avoir conservation du débit massique :

$$q_m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$$

Par conséquent :  $q_m(v_2 - v_1) = \rho v_2 S_2 (v_2 - v_1) = (P_1 - P_2) S_2$

$$\Rightarrow P_1 = P_2 + \rho v_2^2 - \rho v_1 v_2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \rho v_1 v_2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2}_{\frac{1}{2} \rho (v_1 - v_2)^2} - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

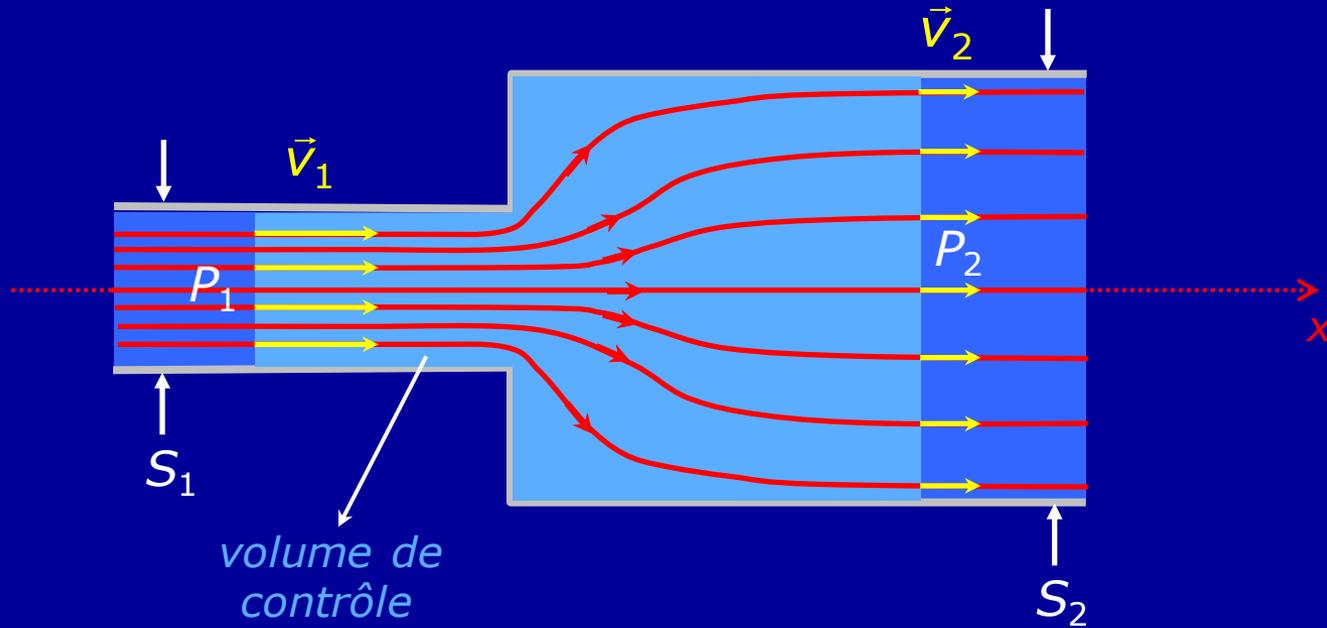


$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \frac{1}{2} \rho (v_1 - v_2)^2$$

*perte de charge  
due à la singularité*

Exprimons cette perte de charge en fonction de la pression cinétique dans la conduite amont :

$$\frac{1}{2} \rho (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \rho \left( v_1 - v_1 \frac{S_1}{S_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 (1 - S_1/S_2)^2$$

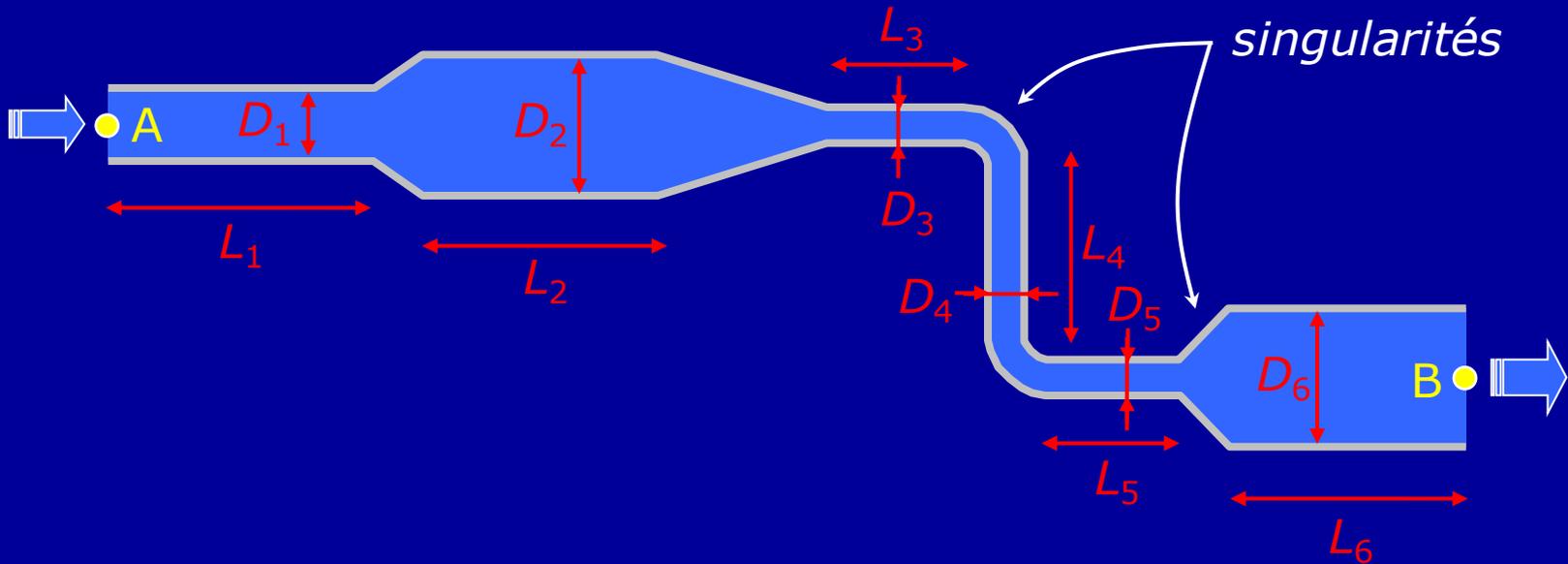


Enfin, on obtient :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 K$$

nombre sans dimension :  $K = (1 - S_1/S_2)^2$   
 coefficient de perte de charge singulière  
 due à un élargissement brusque

On peut ainsi compléter l'équation de *Bernoulli* généralisée :



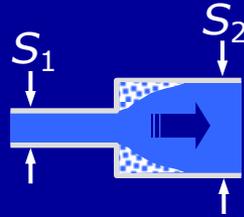
$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2} \rho v_i^2 + \sum_j K_j \frac{1}{2} \rho v_j^2$$

coefficients de perte de charge singulière associés à chaque singularité rencontrée au cours de l'écoulement

Listons quelques singularités typiques...

Elargissement brusque

$$K = (1 - S_1/S_2)^2$$



Coude brusque

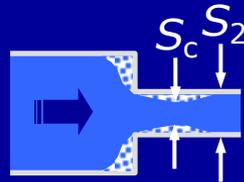
$$K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$$



Rétrécissement brusque

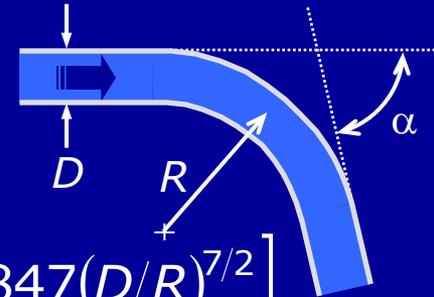
$$K = (1/\mu - 1)^2$$

$$\mu = S_c/S_2$$



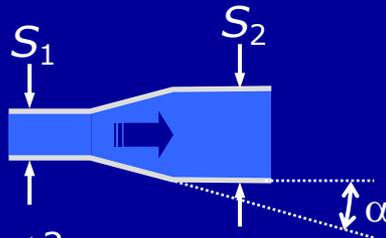
Coude arrondi

$$K = \frac{\alpha}{\pi} \left[ 0,131 + 1,847(D/R)^{7/2} \right]$$



Divergent

$$K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$$

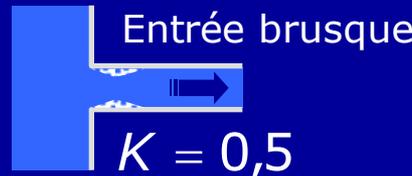


Convergent

$$K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$$

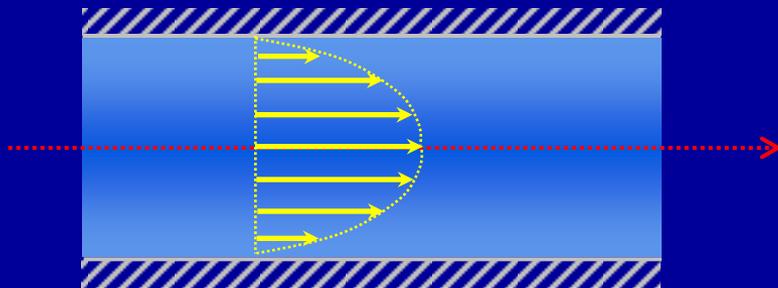


Entrée d'une canalisation



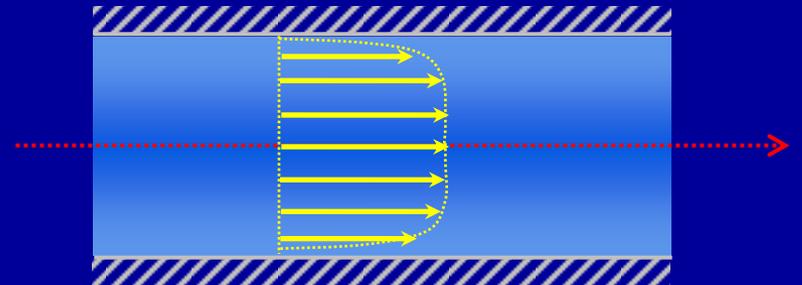
## 6 - Pertes de charge en régime turbulent

En régime turbulent, le profil de vitesse dans une conduite cylindrique n'est plus parabolique : à cause des turbulences, les vitesses sont uniformisées sur un large domaine. On observe cependant une brusque variation de vitesse au voisinage des parois.



écoulement laminaire

$$Re < 2000 \Rightarrow \lambda = \frac{64}{Re}$$

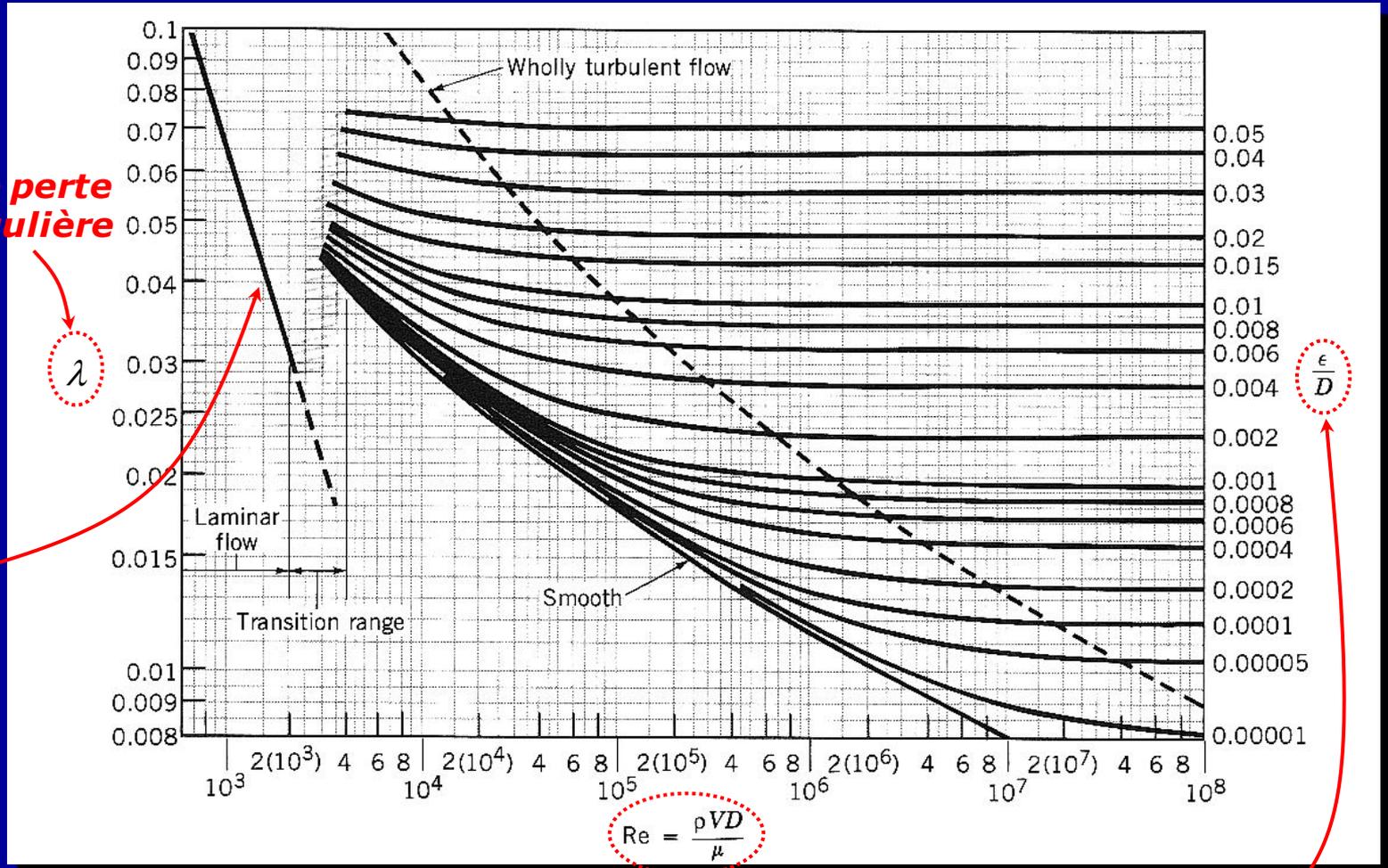


écoulement turbulent

$$Re > 2000 \Rightarrow \lambda = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

On peut donc toujours utiliser l'équation de *Bernoulli* généralisée, mais les coefficients de perte de charge régulière  $\lambda$  devront être déterminés expérimentalement, ou bien tirés d'abaques ou de lois empiriques.

Diagramme de *Moody* :



**coefficient de perte de charge régulière**

$\lambda$

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

**nombre de Reynolds**

**rugosité relative des parois de la conduite**

