Université Ibn Zohr
Ecole Supérieure de Technologie - Agadir
Dr. Yassine Sabbar

Année universitaire: 2019-2020
Filière: GE (S2 - M5 E1)
Matière: Analyse numérique

Série 2

Exercice 1: (Décomposition LU)
Soit α un paramètre réel et soient les matrices A_α, P et le vecteur b définis par:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition sur α, la matrice A_α est inversible?
2. A quelle condition sur α, la matrice A_α admet-elle une décomposition LU (sans pivot)?
3. Soit $\alpha = -1$. Calculer, si elle existe, la décomposition LU de la matrice $M = PA_\alpha$.
4. Soit $\alpha = -1$. Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en résolvant le système linéaire $Mx = Pb$.

Exercice 2: (Norme d'ordre p)
L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $||v||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.

1. Montrer que $||.||_1$ est une norme.
2. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que pour tous $\alpha, \beta \geq 0$,
$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$
où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
3. En déduire que $\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq ||u||_p ||v||_q$, toujours avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
4. Montrer alors que $||u + v||_p \leq ||u||_p + ||v||_q$.
(Remarque: On utilisera la relation: $(|u_i| + |v_i|)^p = |u_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} + |v_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1}$).

Exercice 3: (Conditionnement $Cond_\infty(.)$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et considérons les matrices carrées de dimension $n > 3$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & -\alpha \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \dots & -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha} & \dots & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ -\frac{\gamma}{\alpha} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ -\frac{\gamma}{\alpha} & \dots & -\frac{\gamma}{\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}$$

1. Calculer γ et β pour que B soit l'inverse de A.

2. Calculer le conditionnement $Cond_\infty(A)$ en fonction de n et en calculer la limite pour n qui tend vers l'infini.

Exercice 4: (Méthodes itératives Vs méthodes directes)
Soit les systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases} \tag{2}$$

1. Rappeler une condition suffisante de convergence pour les méthodes de JACOBI et de GAUSS-SEIDEL. Rappeler une autre condition suffisante de convergence pour la méthode de GAUSS-SEIDEL (mais non pour la méthode de JACOBI). Les systèmes (1) et (2) vérifient-ils ces conditions?
2. Écrire les méthodes de JACOBI et de GAUSS-SEIDEL pour ces deux systèmes linéaires.
3. On illustrera les résultats théoriques de convergence/non-convergence de ces deux schémas en prenant comme point de départ le vecteur $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ et en calculant les 3 premiers itérés:
   (a) avec la méthode de JACOBI pour le système (1),
   (b) avec la méthode de GAUSS-SEIDEL pour le système (1),
   (c) avec la méthode de JACOBI pour le système (2),
   (d) avec la méthode de GAUSS-SEIDEL pour le système (2),
   (e) On comparera le résultat obtenu avec la solution exacte (qu'on calculera à l'aide de la méthode d'élimination de GAUSS).

Exercice 5: (Méthodes itératives Vs méthodes directes)
Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Approcher la solution avec la méthode de JACOBI avec 3 itérations à partir de $x^{(0)} = (2, 2, 2)$.
2. Approcher la solution avec la méthode de GAUSS-SEIDEL avec 3 itérations à partir de $x^{(0)} = (2, 2, 2)$.
3. Résoudre les systèmes linéaires par la méthode d'élimination de GAUSS.
4. Factoriser la matrice A (sans utiliser la technique du pivot) et résoudre les systèmes linéaires.

Exercice 6: (Méthodes itératives Vs méthode du gradient)
Calculer la première itération des méthodes de JACOBI, GAUSS-SEIDEL et du gradient préconditionné (où le préconditionneur est la diagonale de A) pour le système:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = 0, \end{cases}$$

avec $x^{(0)} = (1, 1/2)^T$.